300519

Matematikai Lapok

U.S.

6/1996

13.

1996/1–2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 6. évfolyam (1996), 1–2. szám

(Megjelent 2000-ben)

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 201–7656.

Egyes szám ára 400 Ft+ÁFA.

* Megjegyzés: Korábbi előfizetőknek a lap ára az eddigi befizetés függvénye.

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

MENNYI A KICSI HA A TÉR NAGY? NULLAHALMAZOK BANACH-TEREKBEN

CSÖRNYEI MARIANNA

1. Bevezetés

Banach-tereken értelmezett mértéken mindig a tér Borel-halmazain definiált σ-véges mértéket értünk.

Egy Banach-téren nincs egyetlen kitüntetett mérték, mint például a véges dimenziós euklideszi terekben, sokan sok különböző mértéket vezettek be és vizsgáltak. Fontos, és sokszor nagyon nehéz probléma ezen mértékek egymáshoz való viszonyának megértése.

Gyakran nem maguk a mértékek, hanem a mértékek szerinti nullahalmazok kerülnek előtérbe. A nullahalmazok fogalma általában egyszerűbb: már a valós számokon értelmezett Lebesgue-mérték esetén is, a 0-mértékű halmazok definíciója (lefedhetőek tetszőlegesen kis összhosszúságú intervallum-rendszerrel) sokkal könnyebb a Lebesgue-mértékénél, amelyből származnak.

Hasonló a helyzet a végtelen dimenziós Banach-terekben is: itt is mértékek nélkül definiálhatjuk, mit értünk 0-mértékű halmazokon. Azonban itt a probléma a véges dimenziós esetnél sokkal mélyebb: nemcsak hogy nem tudunk, de gyakran nem is lehet olyan mértéket definiálni, amely szerint nullahalmazaink pontosan a 0-mértékűek.

A legalapvetőbb kívánság egy nullahalmaz-fogalommal szemben az, hogy σ-ideál és eltolásinvariáns legyen. Azonban a végtelen dimenziós terek nagyon „nagyok", és ez általában azt eredményezi, hogy van kontinuum sok páronként diszjunkt halmaz, melyek nem 0-mértékűek, így hozzájuk mérték nem létezhet!

Ezt a nehézséget kétféleképpen lehet áthidalni:

(i) a véges dimenziós terek nullahalmazait nem úgy karakterizáljuk, hogy Lebesgue-mérték szerinti 0-mértékűek, hanem valamely más tulajdonságuk alap-

---

Az ELTE-n 1999-ben elkészített diplomamunka. Szeretném megköszönni Petruska György professzornak a megíráshoz adott segítséget, a sok-sok órát amit rám áldozott.

ján, majd ezt általánosítjuk Banach-terekre – ez történik a Haar-nulla és az Aronszajn-nulla halmazok esetében;

(ii) nem egyetlen mértéket, hanem egy nagyobb mértékosztályt adunk meg, és nullahalmaznak hívjuk azokat a halmazokat, amelyek valamennyi mérték szerint 0-mértékűek – ld. Gauss-mértékek illetve kocka-mértékek.

Sokáig fontos megoldatlan probléma volt a legfontosabb nullahalmaz-fogalmak (Haar-, Gauss-, kocka-, illetve Aronszajn-nulla) egymáshoz való viszonya. 1978-ban R. R. Phelps bebizonyította, hogy minden Haar-nulla halmaz Gauss-nulla és nem minden Gauss-nulla halmaz Haar-nulla, valamint hogy az Aronszajn-nulla halmazok Gauss-nullák. Az, hogy minden Aronszajn-nulla halmaz kocka-nulla, triviális.

A dolgozat fő eredménye a 4.2. és a 6.1. tétel (minden Gauss-nulla halmaz kocka-nulla illetve minden kocka-nulla halmaz Aronszajn-nulla), vagyis annak bizonyítása, hogy a Gauss-, kocka- és Aronszajn-nulla halmazok valójában ugyanazok!

$$\begin{array}{ccc} H & \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & G \\ & & \Uparrow \\ K & \Leftarrow & A \end{array} \qquad \text{helyett} \qquad \begin{array}{ccc} H & \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & G \\ \not\Uparrow\Downarrow & & \Updownarrow \\ K & \Leftrightarrow & A \end{array}$$

A 4.2. és 6.1. tételek bizonyításának részletes leírása megtalálható a hamarosan megjelenő [7] cikkben és [9], [15] könyvekben is – sőt, a dolgozatban említett valamennyi tétel és még rengeteg érdekes eredmény megtalálható lesz a [2] könyv 8. fejezetében és D. függelékében, amennyiben a szerzők művüket valaha is befejezettnek tekintik és megjelentetik.

A 2. fejezetben összefoglaljuk a Banach-terekben értelmezett mértékekkel kapcsolatos legalapvetőbb tudnivalókat, a 3., 4. és 5. fejezetben bemutatjuk a Haar-, Gauss- és kocka-, valamint az Aronszajn-nulla halmazok illetve mértékek legfontosabb tulajdonságait. A 6. fejezet tartalmazza annak bizonyítását, hogy minden kocka-nulla halmaz Aronszajn-nulla, végül a 7. fejezetben megpróbáljuk néhány példával illusztrálni, a nullahalmazok mennyire másképp viselkednek Banach-térben, mint ahogy megszoktuk a véges dimenziós esetben.

2. Mértékekről általában

Ebben a fejezetben „mérték" alatt mindig a tér Borel-halmazain értelmezett **valószínűségi mértéket** fogunk érteni.

Egy μ mérték *reguláris,* ha minden B Borel-halmazra

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B \text{ kompakt}\} = \inf\{\mu(G) : G \supset B \text{ nyílt}\}.$$

Egy teret *Radon-térnek* nevezünk, ha rajta minden mérték reguláris.

2.1. Tétel. *Minden lengyel tér (speciálisan minden szeparábilis Banach-tér) Radon.*

Bizonyítás. Legyen μ egy tetszőleges mérték, és B egy tetszőleges Borel-halmaz. Először megmutatjuk, hogy van olyan F zárt és G nyílt halmaz, amelyre $F \subset B \subset G$, és

$$\mu(G \setminus F) < \varepsilon. \tag{1}$$

Világos, hogy az ilyen tulajdonságú Borel-halmazok σ-algebrát alkotnak, ezért elég megmutatni, hogy a zárt halmazok rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.

Legyen tehát B zárt. Ekkor a $G_n \overset{\text{def}}{=} \{x : \operatorname{dist}(x, B) < \frac{1}{n}\}$ fogyó nyílt halmazokra $B = \bigcap_n G_n$, ezért elég nagy n-re $\mu(G_n \setminus B) < \varepsilon$. Ekkor $G = G_n$ és $F = B$ választással valóban teljesül (1).

Már csak azt kell bebizonyítani, hogy minden F zárt halmaz tartalmaz K kompaktot, amelyre $\mu(F \setminus K) < \varepsilon$. Mivel a tér szeparábilis, ezért F lefedhető megszámlálható sok $\frac{1}{n}$ sugarú zárt gömbbel, ezek között van véges sok, melyek uniója legalább $\mu(F) - \frac{\varepsilon}{2^n}$ mértékű halmazban metszi F-et, mondjuk F_n-ben. A $K \overset{\text{def}}{=} \bigcap_n F_n$ halmaz zárt és teljesen korlátos, így kompakt, és valóban teljesül rá $\mu(F \setminus K) < \varepsilon$. ■

A μ_n mértékek *gyengén konvergálnak* μ*-höz,* ha minden folytonos korlátos függvényre $\int f\,d\mu_n \to \int f\,d\mu$, azaz ha $\mu_n \to \mu$ a folytonos korlátos függvények duális terében a w^* topológia szerint.

Könnyen látható, hogy ugyanezt a topológiát indukálja az alábbi, úgynevezett *Lévy-metrika,* és ezzel a metrikával a mértékek tere teljes:

$$\rho(\mu, \nu) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\varepsilon : \forall A,\ \mu(A) \le \nu(A_\varepsilon) + \varepsilon,\ \nu(A) \le \mu(A_\varepsilon) + \varepsilon\},$$

ahol $A_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \{x : \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.

A valószínűségi mértékek egy H részhalmazát *feszesnek* hívjuk, ha minden ε-ra van olyan K kompakt halmaz, amelyre $\mu(K) > 1 - \varepsilon$ minden $\mu \in H$-ra.

Mivel egy lengyel térben minden mérték reguláris, ezért az 1 elemű halmazok feszesek. Prohorovtól származik a következő, sokkal mélyebb tétel (lsd. pl. [3]):

2.2. Tétel. *A valószínűségi mértékek egy H részhalmaza pontosan akkor relatív kompakt a gyenge konvergencia topológiában, ha feszes.*

Bizonyítás. Legyen μ_n egy feszes sorozat, azt kell bebizonyítanunk, hogy van gyengén konvergens részsorozata. Válasszunk $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ kompakt halmazokat, amelyekre $\mu_n(K_m) \ge 1 - \frac{1}{2^m}$ teljesül minden n, m-re. Mivel $C(K_m)^*$ egységgömbje w^*-kompakt, ezért (átlós eljárás segítségével) található olyan μ_{n_i} részsorozat, amelyre $\mu_{n_i|K_m} \to \nu_m$ $C(K_m)^*$-ban az w^*-topológia szerint. Nyilván

$\left\|\mu_{n_i|K_m} - \mu_{n_i|K_l}\right\| \leq \frac{1}{2^m}$ minden $m < l$-re és i-re, így teljesül $\|\nu_m - \nu_l\| \leq \frac{1}{2^n}$, vagyis $\nu_n \to \nu$ valamely ν mértékre. Ekkor persze $\mu_{n_i} \to \nu$.

A másik irány bizonyítása analóg a 2.1. Tétel bizonyításával, csak azt kell megmutatnunk, hogy ha H relatív kompakt, akkor a teret lefedve megszámlálható sok $\frac{1}{n}$ sugarú zárt gömbbel, mondjuk $B_1, B_2, \ldots$-al, kiválasztható közülük véges sok, melyek uniója legalább $1 - \frac{\varepsilon}{2^n}$ minden H-beli μ mérték szerint.

Tegyük fel, hogy ez nem teljesül, azaz minden j-re van $\mu_j \in H$, amelyre $\mu_j\left(\bigcup_{i=1}^{j} B_i\right) < 1 - \frac{\varepsilon}{2^n}$. Mivel H relatív kompakt, ezért feltehető, hogy $\mu_j \to \mu$. A μ mérték reguláris, vagyis van olyan K kompakt halmaz, amire $\mu(K) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^n}$, és K-t lefedi véges sok B_i gömb uniója, ami ellentmondás. ■

Egy mértéket mindig tekinthetünk egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvényének. Egy, a valós számokon és általában az $\mathbf{R}^n$-en értelmezett valószínűségi változó karakterisztikus függvénye az $e^{i\langle x,X\rangle}$ függvény várható értéke, azaz

$$\phi_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle x,y\rangle}\, d\mu_X(y),$$

ahol μ_X az X eloszlásfüggvénye; ez a függvény a valószínűségi változót egyértelműen meghatározza.

Ezzel analóg módon definiálhatjuk a végtelen dimenziós euklideszi-téren, azaz a szeparábilis $\mathcal{H}$ Hilbert-téren definiált mértékek (valószínűségi változók) *karakterisztikus függvényét:*

$$\phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{H}} e^{i\langle x,y\rangle}\, d\mu(y).$$

S. Bochner és A. Hinchin híres tétele szerint (lsd. [8]) minden olyan $\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ függvény karakterisztikus függvénye egy X valószínűségi változónak, amely pozitív definit, folytonos a 0-ban, és amelyre teljesül $\phi(0) = 1$.

Ezt az eredményt Hilbert-terekre R. A. Milnos és V. V. Sazonov ([12] és [16]) általánosította. A tétel kimondásához először szükségünk van néhány definícióra.

Egy Hilbert-téren értelmezett A korlátos lineáris operátor *Hilbert–Schmidt operátor,* ha

$$\|A\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_i \|Ae_i\|^2\right)^{1/2}$$

értéke véges, ahol $\{e_i\}$ a Hilbert-tér egy ortonormált bázisa. Az A operátor *nyomosztályú operátor,* ha két Hilbert–Schmidt operátor szorzata. Bebizonyítható, hogy az utóbbi definíció ekvivalens azzal, hogy $\|A\|_1$ véges, ahol

$$\|A\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \left\langle |A|e_i, e_i \right\rangle,$$

$$|A| \stackrel{\text{def}}{=} (A^*A)^{1/2}.$$

$\|A\|_2$ és $\|A\|_1$ értéke nem függ a bázis megválasztásától.

2.3. Tétel. *Egy $\phi : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ függvény pontosan akkor karakterisztikus függvénye egy, a Hilbert-téren értelmezett mértéknek, ha*

(i) *pozitív definit;*

(ii) $\phi(0) = 1$;

(iii) *minden $\varepsilon > 0$-ra van olyan T_ε nemnegatív nyom-osztályú operátor, hogy $\langle T_\varepsilon y, y\rangle \leq 1$ esetén teljesül $\mathrm{Re}\big(\phi(0) - \phi(y)\big) < \varepsilon$.*

3. Haar-mérték és Haar-nulla halmazok

Ismert, hogy minden lokálisan kompakt, szeparábilis teljes Abel-csoporton létezik egy eltolásinvariáns (nem feltétlenül valószínűségi) mérték, az úgynevezett Haar-mérték. Azonban a szeparábilis Banach-terek nem lokálisan kompaktak, és bebizonyítható, hogy eltolásinvariáns mérték nincsen rajtuk. Ennek ellenére, a Haar-nulla halmaz fogalma (tehát azok a halmazok, amelyek Haar-mértéke 0) kiterjed Banach-terekre is. Az alábbi definíció, és a fejezet valamennyi tétele J. P. R. Christensen-től származik ([6]).

Definíció. Egy szeparábilis teljes Abel-csoport B Borel-részhalmaza *Haar-nulla,* ha van olyan μ valószínűségi Borel-mérték a csoporton, amely szerint B minden eltoltja 0-mértékű.

(Világos, hogy a definícióban valójában nincs szükség arra a feltételre, hogy a keresett mérték egy valószínűségi mérték, mert minden σ-véges mértékhez választhatunk egy abszolút folytonos valószínűségi mértéket.)

Megmutatjuk, hogy lokálisan kompakt esetben, tehát amikor a csoporton van Haar-mérték, a Haar-nulla halmazok valóban megegyeznek a 0-mértékű halmazokkal. Nem lokálisan kompakt esetben azonban annak a bizonyítása sem világos, hogy a Haar-nulla halmazok σ-ideált alkotnak. Ehhez szükségünk lesz a valószínűségi mértékek konvolúciójának fogalmára. Két valószínűségi mérték, μ és ν konvolúciója az a $\mu * \nu$ mérték, amelyre

$$\int_G \int_G f(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \int_G f(x)\, d(\mu * \nu)(x)$$

teljesül minden folytonos korlátos f függvényre, azaz

$$(\mu * \nu)(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_G \nu(A - x)\, d\mu(x).$$

Könnyen látható, hogy $\mu * \nu$ is valószínűségi mérték, és $\mu * \nu = \nu * \mu$.

3.1. Tétel. *Ha G lokálisan kompakt, akkor egy B Borel-halmaz pontosan akkor Haar-nulla, ha Haar-mértéke* 0.

Bizonyítás. Ha B Haar-mértéke 0, akkor az eltolás-invariancia miatt B minden eltoltjának is 0 a Haar-mértéke, vagyis a keresett mértéknek választhatjuk a Haar-mértéket.

Megfordítva, ha valamely μ mértékre $\mu(B + x) = 0$ minden x-re, akkor a Fubini-tétel alapján

$$0 = \int \int \chi_B(x + y)\, d\mu(x)\, dh(y) = h(B),$$

ahol h jelöli a Haar-mértéket. ■

3.2. Tétel. *A Haar-nulla halmazok σ-ideált alkotnak.*

Bizonyítás. Az, hogy egy Haar-nulla halmaz részhalmaza is Haar-nulla, triviális. Azt kell megmutatnunk, hogy megszámlálható sok Haar-nulla halmaz uniója is Haar-nulla.

Könnyen látható, hogy két Haar-nulla halmaz uniója Haar-nulla, mert ha B_1 minden eltoltja 0-mértékű μ szerint és B_2 minden eltoltja 0-mértékű ν szerint, akkor $B_1 \cup B_2$ minden eltoltja 0-mértékű $\mu * \nu$ szerint. A megszámlálható unió bizonyításához azonban végtelen sok mérték konvolúciójára van szükségünk.

Tudjuk, hogy a valószínűségi mértékek tere a ρ Lévy-metrikával teljes metrikus tér. Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ Haar-nulla halmazok, válasszunk minden n-re egy μ_n valószínűségi mértéket, amelyre

(i) $\mu_n(A_n + x) = 0$ minden $x \in G$-re, és

(ii) $\rho(\mu_n, \delta) < \frac{1}{2^n}$ a δ (0-tartójú) Dirac-mértékre.

Ilyet könnyű konstruálni, mert ha egy halmaz minden eltoltja 0-mértékű valamely μ valószínűségi mérték szerint, akkor ugyanez teljesül μ minden eltoltjára, valamint minden olyan mértékre, amely abszolút folytonos μ-re nézve, speciálisan a

$$\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu\big((A + x) \cap B\big)}{\mu(B)}$$

alakú mértékekre is, ahol B egy rögzített, pozitív μ-mértékű Borel-halmaz. Ez alapján tudunk olyan mértéket konstruálni, amelyre teljesül (i), és a 0 egy kis környezetébe van koncentrálva, így teljesül rá (ii) is.

A konvolúció definíciójából világos, hogy tetszőleges ν_1, ν_2, μ mértékekre

$$\rho(\nu_1 * \mu, \nu_2 * \mu) \le \rho(\nu_1, \nu_2),$$

és tetszőleges μ mértékre

$$\mu * \delta = \mu,$$

így

$$\rho(\mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_n,\ \mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_{n-1}) \leq \frac{1}{2^n},$$

vagyis a tér teljessége miatt létezik $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{\infty} *\mu_k$. Mivel a konvolúció a távolságokat nem növeli, ezért $\nu_n \to \nu$ esetén tetszőleges ν_0 mértékre $\nu_n * \nu_0 \to \nu * \nu_0$, ebből azonnal adódik $\mu = \mu_n * (\prod_{k \neq n} *\mu_k)$, amiből következik $\mu \ll \mu_n$ minden n-re. Így $\mu(A_n + x) = 0$ minden n-re és x-re, ezzel az állítást bebizonyítottuk. ■

A következő tételek fontos példákat mutatnak Haar-nulla halmazokra végtelen dimenziós szeparábilis Banach-terekben.

3.3. Tétel. *Végtelen dimenziós szeparábilis Banach-térben minden kompakt halmaz Haar-nulla.*

3.4. Tétel. *Végtelen dimenziós nem reflexív szeparábilis Banach-térben minden gyengén kompakt halmaz Haar-nulla.*

Mindkét tétel bizonyítása a véges dimenziós térben jól ismert Steinhaus-tétel végtelen dimenziós kiterjesztésén alapszik:

3.5. Tétel. *Ha A nem Haar-nulla halmaz, akkor $A - A$ tartalmazza a 0 egy környezetét.*

A 3.5. Tétel bizonyítása. Bebizonyítjuk, hogy az

$$\{x : A \cap (A + x) \text{ nem Haar-nulla}\}$$

halmaz tartalmaz 0-környezetet.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van egy olyan x_n sorozat, amelyre $\|x_n\| < \frac{1}{2^n}$ és $A \cap (A + x_n)$ Haar-nulla. Mivel a Haar-nulla halmazok σ-ideált alkotnak, ezért így $\bigcup_n A \cap (A + x_n)$ is Haar-nulla, vagyis $B \stackrel{\text{def}}{=} A \setminus \bigcup_n (A \cap (A + x_n))$ nem Haar-nulla. A B halmaz definíciójából következik, hogy

$$B \cap (B + x_n) = \emptyset \quad \forall n. \tag{2}$$

Legyen $C \stackrel{\text{def}}{=} \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ a Cantor-csoport, és egy $c = (c_1, c_2, \ldots) \in C$ pontra legyen $\phi(c) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n c_n x_n$. Ez egy folytonos leképezés C-ből a Banach-térbe. Legyen a Cantor-csoporton a Haar-mérték h, és tekintsük a $\mu \stackrel{\text{def}}{=} h \circ \phi^{-1}$ mértéket a Banach-téren.

Mivel B nem Haar-nulla, ezért valamely y-ra $\mu(B+y) \neq 0$, azaz $B^* \stackrel{\text{def}}{=} \phi^{-1}(B+y)$ Haar-mértéke pozitív. De ekkor $B^* - B^*$ tartalmazza a 0 egy környezetét C-ben, speciálisan tartalmaz egy olyan pontot, amelynek csak egyetlen koordinátája 1-es, mondjuk az n-edik. Ez azt jelenti, hogy $x_n \in B - B$, ami ellentmond (2)-nek. ■

3.3. és 3.4. Tételek bizonyítása. Ha K egy kompakt halmaz, akkor $K - K$ is kompakt (például mert $K \times K$ folytonos képe), és egy kompakt halmaz nem tartalmazhat 0-környezetet, mert egy 0-környezetben van nem torlódó sorozat. Ugyanígy, ha K gyengén kompakt, akkor $K - K$ is gyengén kompakt, és nem reflexív Banach térben egy gyengén kompakt halmaz nem tartalmazhat gömböt. ∎

4. Gauss-mérték és Gauss-nulla halmazok

A Banach-tereken értelmezett mértékek közül talán a legtöbbet vizsgált mértékek a Gauss-mértékek, vagy másnéven normális eloszlások.

Először összefoglaljuk a véges dimenziós Gauss-mértékek legfontosabb tulajdonságait.

A valós számokon értelmezett

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

sűrűségfüggvénnyel megadott valószínűségi változót *standard Gauss* vagy *standard normális* valószínűségi változónak hívjuk. A *standard n-dimenziós Gauss-mérték* n db standard Gauss-mérték szorzata $\mathbf{R}^n$-en. Egy $\mathbf{R}^n$-en értelmezett Y valószínűségi változó *Gauss,* ha felírható

$$Y = AX + m$$

alakban, ahol X a standard n-dimenziós Gauss-mérték, A egy $k \times n$-es mátrix, és $m \in \mathbf{R}^k$. Ekkor m az Y valószínűségi változó várható értéke, és $S \stackrel{\text{def}}{=} AA^T$ az Y kovariancia mátrixa.

Bebizonyítható, hogy Y-t m és S már egyértelműen meghatározza, és karakterisztikus függvénye

$$\phi_Y(x) = e^{i\langle x,m\rangle - \langle Sx,x\rangle/2}.$$

Ha S invertálható, akkor Y-nak létezik sűrűségfüggvénye, és ez

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\det(S)}e^{-\langle S^{-1}(x-m),x-m\rangle/2}.$$

Ekkor Y-t *nemelfajuló* Gauss-mértéknek hívjuk.

Bebizonyítható, hogy $\mathbf{R}^n$-en egy mérték pontosan akkor Gauss, ha minden 1-dimenziós vetülete Gauss. Ez alapján a Gauss-mérték definíciója általánosítható Banach-terekre is:

Definíció. Egy μ valószínűségi mérték egy szeparábilis Banach-téren *Gauss-mérték,* ha a duális tér minden x^* elemére a

$$\mu_{x^*}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mu\{y : \langle x^*, y\rangle \in A\} \quad (A \subset \mathbf{R})$$

egyenlőséggel definiált mérték 1-dimenziós Gauss-mérték. Ha minden $x^* \neq 0$-ra μ_{x^*} nemelfajuló, akkor μ-t *nemelfajuló Gauss-mértéknek* hívjuk.

Banach-terekben a legelőször vizsgált és egyik legfontosabb Gauss-mérték az úgynevezett *Wiener-mérték* $C([0,1])$-en: az a (létező és egyértelmű) w mérték, melyre

(i) minden rögzített $0 \leq t \leq 1$-re $f(t)$ $\big(f \in C([0,1])\big)$ egy 0 várható értékű, $\sqrt{t}$ szórású Gauss-valószínűségi változó;

(ii) minden rögzített $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \leq 1$-re az $f(t_{k+1}) - f(t_k)$ valószínűségi változók függetlenek.

Ekkor persze $f(0) = 0$ és ezért w elfajuló, de már nemelfajuló Gauss-mértéket kapunk az $\{f : f(0) = 0\}$ altéren.

A Wiener-mérték egy explicit megadása megtalálható pl. [3]-ban.

Hilbert-téren a Gauss-mértékeket megadhatjuk a karakterisztikus függvényükkel:

4.1. Tétel. *Egy $\mathcal{H}$ Hilbert-téren a μ mérték pontosan akkor Gauss, ha van olyan $x_0 \in \mathcal{H}$ és S nemnegatív nyom-osztályú operátor, amelyre*

$$\int_{\mathcal{H}} e^{i\langle x,y\rangle}\, d\mu(y) = e^{i\langle x,x_0\rangle - \langle Sx,x\rangle/2}. \tag{3}$$

A μ mérték pontosan akkor nemelfajuló, ha $\ker(S) = \{0\}$.

Bizonyítás. Az egyik irány triviális: ha μ-re teljesül (3), és μ_x jelöli $\langle x, \cdot\rangle$ eloszlását, akkor μ_x karakterisztikus függvénye

$$\int_{\mathbf{R}} e^{its}\, d\mu_x(t) = \int_{\mathcal{H}} e^{is\langle x,y\rangle}\, d\mu(y) = e^{is\langle x,x_0\rangle - s^2\langle Sx,x\rangle/2},$$

ami (rögzített x-re) valóban 1-dimenziós Gauss-mérték karakterisztikus függvénye.

Megfordítva, tegyük fel, hogy μ Gauss-mérték. Ekkor minden μ_x mérték Gauss, tehát

$$\phi(x) = \int_{\mathcal{H}} e^{i\langle x,y\rangle}\, d\mu(y) = e^{im_x - \sigma_x^2/2},$$

ahol

$$m_x = \int_{\mathcal{H}} \langle x, y\rangle\, d\mu(y) \quad \text{és} \quad \sigma_x^2 = \int_{\mathcal{H}} \big(\langle x, y\rangle - m_x\big)^2\, d\mu(y).$$

Ekkor

$$m_x = \lim_{r\to\infty} \int_{\|y\|\le r} \langle x, y\rangle \, d\mu(y),$$

és a konvergencia lokálisan egyenletes, így az $x \to m_x$ leképezés folytonos. Ebből már következik, hogy $m_x = \langle x, x_0\rangle$ valamely $x_0 \in \mathcal{H}$-ra.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $x_0 = 0$ (ez csak a μ mérték eltolását jelenti). Ekkor

$$\sigma_x^2 = \int_{\mathcal{H}} \langle x, y\rangle^2 \, d\mu(y),$$

így $\sigma_x^2 = \langle Sx, x\rangle$ valamely S pozitív lineáris operátorra, vagyis $\phi(x) = e^{-\langle Sx,x\rangle/2}$, csak azt kell bebizonyítani, hogy S valóban egy nyom-osztályú operátor.

A 2.3. Tétel alapján van olyan T nemnegatív nyom-osztályú operátor, amelyre $\langle Tx, x\rangle \le 1$ esetén $1 - e^{-\langle Sx,x\rangle/2} \ge 1/2$, így $\langle Sx, x\rangle \le \log 4$. Azt is feltehetjük, hogy T és S magja megegyezik. Ekkor $S \le \log 4 \cdot T$, és mivel T nyom-osztályú, ezért $\|S\|_1 \le \log 4 \|T\|_1$ miatt S is biztosan nyom-osztályú.

Végül, μ pontosan akkor nemelfajuló, ha minden x-re $\sigma_x \ne 0$, azaz ha minden $0 \ne x$-re $\langle Sx, x\rangle > 0$. Ez ekvivalens azzal, hogy $\ker(S) = \{0\}$. ■

A 2.3. Tételből következik, hogy minden x_0-ra és S-re létezik (pontosan egy) Gauss-mérték, amelyre teljesül (3).

A 4.1. Tétel fontos következménye, hogy Hilbert-térben egy Gauss-mérték mindig független 1-dimenziós Gauss-mértékek illetve Dirac-mértékek szorzata. Valóban, válasszunk egy $\{e_n\}$ ortonormált bázist S sajátvektoraiból (ilyet lehet, mert minden nyom-osztályú, sőt minden Hilbert–Schmidt operátor kompakt), és legyenek a hozzájuk tartozó sajátértékek $\lambda_n \ge 0$. Ekkor $\|S\|_1 = \sum_n \lambda_n < \infty$, és az $a_n = \langle x, e_n\rangle$, $\alpha_n = \langle x_0, e_n\rangle$ jelölésekkel

$$\phi(x) = \prod e^{i\alpha_n a_n - \lambda_n a_n^2/2}.$$

Általában, tetszőleges szeparábilis Banach-térben a nem-elfajuló Gauss-mértékek létezése sem világos. Azonban egy Hilbert-téren értelmezett Gauss-mértékből könnyen konstruálhatunk Gauss-mértéket tetszőleges Banach-térben:

Legyen $\mathcal{B}$ egy Banach-tér, és T egy folytonos lineáris leképezés $\mathcal{H}$-ból $\mathcal{B}$-be. Ekkor a Hilbert-téren értelmezett bármely μ Gauss-mértékre $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \mu \circ T^{-1}$ Gauss-mérték $\mathcal{B}$-n, és ha μ nemelfajuló volt és T képe sűrű $\mathcal{B}$-ben, akkor ν is nemelfajuló. Ha $\mathcal{B}$ szeparábilis, akkor valóban létezik olyan $T : \mathcal{H} \to \mathcal{B}$ folytonos lineáris leképezés, amelynek a képe sűrű.

Hasonló módon lehet definiálni más mértékeket is szeparábilis Banach-térben:

Definíció. A $\mathcal{B}$ szeparábilis Banach-téren μ *kocka-mérték,* ha egy $a + \sum_k X_k e_k$ alakú valószínűségi változó eloszlása, ahol $a, e_1, e_2, \ldots \in \mathcal{B}$, $\sum_k \|e_k\| < \infty$, és $X_1, X_2, \ldots$ független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók $[0,1]$-en. A μ kocka-mérték *nemelfajuló,* ha az $e_1, e_2, \ldots$ vektorok által feszített altér sűrű $\mathcal{B}$-ben.

Világos, hogy a kocka-mértékek pontosan azok a mértékek, amelyek megkaphatók a $\mathcal{Q} = [0,1]^{\mathbf{N}}$ Hilbert-kockán értelmezett λ standard Lebesgue-mértékből $\lambda \circ T^{-1}$ alakban, ahol $q = (q_1, q_2, \ldots) \in \mathcal{Q}$-ra $T(q) \stackrel{\text{def}}{=} a + \sum_k q_k e_k$.

Végtelen sok mérték szorzatának (speciálisan a fenti $\mathcal{Q}$ Hilbert-kockán értelmezett λ Lebesgue-mértéknek) a viselkedése eltér a véges dimenziós esetben megszokottól. Például, az $\left(\frac{1}{2}, 1\right]^{\mathbf{N}}$ kockának kontinuum sok diszjunkt eltoltja van $\mathcal{Q}$-ban, így nyilván 0-mértékű (ami persze a $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = 0$ egyenlőségből is azonnal látszik). Általában pedig a $\prod_{n=1}^{\infty} [\varepsilon_n, 1]$ kocka mértéke $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n)$, vagyis ez a mérték pontosan akkor pozitív, ha $\sum_n \varepsilon_n < \infty$.

Egy Banach-téren sok nemelfajuló Gauss- és kocka-mérték van, nincs közöttük egyetlen kitüntetett. Sőt, az előbbi észrevétel alapján könnyen megadható kontinuum sok diszjunkt tartójú kocka- illetve Gauss-mérték. Ezért különösen fontosak azok a halmazok, amelyek *minden* nemelfajuló Gauss- vagy kocka-mérték szerint 0-mértékűek:

Definíció. Egy A halmazt *Gauss-nullának* nevezünk, ha minden nem-elfajuló Gauss-mérték szerint 0-mértékű. Ugyanígy, *A kocka-nulla,* ha minden nemelfajuló kocka-mérték szerint 0-mértékű.

Nyilvánvaló, hogy a kocka-nulla és a Gauss-nulla halmazok is σ-ideált alkotnak.

A Gauss-nulla halmazokat R. R. Phelps vezette be, a kocka-nulla halmazokat először P. Mankiewicz használta, akkor még explicit definíció nélkül (lsd. [13] és [10]).

Bebizonyítjuk, hogy minden Gauss-nulla halmaz kocka-nulla. A bizonyításnak az a „lényege", hogy ha a Hilbert-kocka egy kis rész-kockája pozitív mértékű valamely μ valószínűségi mérték szerint, és A egy pozitív Lebesgue-mértékű részhalmaz, akkor A pozitív mértékű μ valamely eltoltja szerint is. Precízebben:

Lemma. *Legyenek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ pozitív valós számok, melyekre $\sum_n \varepsilon_n < \infty$ és $0 < \varepsilon_n < 1$ minden n-re. Legyen $A \subset \prod_{n=1}^{\infty} [\varepsilon_n, 1]$ egy pozitív Lebesgue-mértékű részhalmaza $[0,1]^{\mathbf{N}}$-nek, és legyen μ egy olyan mérték $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$-en, amelyre teljesül $\mu\left(\prod_{n=1}^{\infty} [0, \varepsilon_n]\right) > 0$. Ekkor van olyan $\underline{t} \in [0,1]^{\mathbf{N}}$, hogy a $\mu_{\underline{t}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(X + \underline{t})$ mértékre $\mu_{\underline{t}}(A) > 0$.*

Bizonyítás. A Fubini-tételt alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \mu_{\underline{t}}(A)\, d\lambda(\underline{t}) &\geq \int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \chi_{A-\underline{t}}(\underline{u})\, d\mu(\underline{u})\, d\lambda(\underline{t}) \\
&= \int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \chi_{A-\underline{t}}(\underline{u})\, d\lambda(\underline{t})\, d\mu(\underline{u}) \\
&= \int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \chi_{A-\underline{u}}(\underline{t})\, d\lambda(\underline{t})\, d\mu(\underline{u}) \\
&= \int_{[0,1]^{\mathbf{N}}} \lambda\big((A-\underline{u}) \cap [0,1]^{\mathbf{N}}\big)\, d\mu(\underline{u}) \\
&\geq \int_{\prod[0,\varepsilon_n]} \lambda\big((A-\underline{u}) \cap [0,1]^{\mathbf{N}}\big)\, d\mu(\underline{u}) \\
&= \mu\left(\prod[0,\varepsilon_n]\right) \lambda(A) > 0,
\end{aligned}$$

így valóban van olyan $\underline{t}$, amelyre $\mu_{\underline{t}}(A) > 0$. ∎

4.2. Tétel. *Minden Gauss-nulla halmaz kocka-nulla.*

Bizonyítás. Ha A nem kocka-nulla, akkor van olyan kocka-mérték, amely szerint nem 0-mértékű, így valamilyen $T : \mathcal{Q} \to \mathcal{B}$-re $\lambda(T^{-1}A) > 0$. Feltehető, hogy $A \subset \prod_n [\varepsilon_n, 1]$ valamely, a Lemma feltételeit kielégítő ε_n sorozatra. Tekintsünk $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$-en egy $\prod_n X_n$ valószínűségi változót, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, 0 várható értékű 1-dimenziós Gauss-változók olyan kicsi szórással, hogy $\prod_n [0, \varepsilon_n]$ mértéke pozitív legyen. A Lemmát alkalmazva $T^{-1}A$ mértéke pozitív a $\underline{t} + \prod X_n$ valószínűségi változó μ eloszlása szerint valamilyen $\underline{t}$-re, így a $\mu \circ T^{-1}$ Gauss-mérték szerint A nem 0-mértékű a Banach-térben. ∎

A következő tétel a 3.3. Tétellel együtt a Gauss-nulla és kocka-nulla halmazok kapcsolatát mutatja a Haar-nulla halmazok σ-ideáljával.

4.3. Tétel. *Minden Gauss-nulla halmaz Haar-nulla, és nem minden kompakt halmaz kocka-nulla.*

Bizonyítás. Mindkét állítás triviális. Ha A Gauss-nulla, akkor nyilván tetszőleges μ nemelfajuló Gauss-mértékre $\mu(A + x) = 0$. Másrészt, egy nemelfajuló kocka-mérték tartója $\mathcal{Q}$ folytonos képe, így kompakt, és nyilván nem kocka-nulla. ∎

5. Aronszajn-nulla halmazok

Definíció. Legyenek $e_1, e_2 \ldots$ egy $\mathcal{B}$ szeparábilis Banach-tér elemei. Legyen

$$\mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots)$$

azon $\mathcal{B}$-beli B Borel-halmazok osztálya, amelyek felbonthatók megszámlálható sok Borel-halmaz uniójára úgy, hogy az n-edik halmaz uniója 0-mértékű az e_n irányú egyeneseken, azaz $B = \bigcup_n B_n$, $\lambda\{t \in \mathbf{R} : a + te_n \in B_n\} = 0$ minden a-ra.

Egy B Borel-halmazt *Aronszajn-nullának* nevezünk, ha $B \in \mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots)$ minden olyan $e_1, e_2, \ldots$ sorozatra, amely által kifeszített altér sűrű.

Könnyen látható (a Fubini-tétel segítségével), hogy $\mathbf{R}^n$-ben az Aronszajn-nulla halmazok megegyeznek a (Lebesgue) 0-mértékű halmazokkal. Valóban, egy 0-mértékű halmaz a síkon m.m. vízszintes egyenesen 0-mértékű, és m.m. vízszintes egyenest elhagyva a maradék halmaz persze m.m. függőleges egyenesen 0-mértékű lesz. Ezzel analóg módon bizonyíthatunk magasabb dimenziókban, valamint vízszintes-függőleges helyett más irányú egyenesekre is. (Az pedig, hogy minden Aronszajn-nulla halmaz Lebesgue-nulla, triviális.)

A Lebesgue-nulla halmazokkal való ekvivalencia az eddig bevezetett nullahalmaz-fogalmakra (Haar-nulla, Gauss-nulla, kocka-nulla) már a definícióból triviálisan következett.

Az összes nullahalmaz-fogalom közül az Aronszajn-nulla halmazok fogalma a legkevésbé természetes. Az Aronszajn-nulla halmazokat N. Aronszajn vezette be, bebizonyítva, hogy Banach-téren egy Lipschitz függvény nem-differenciálhatósági pontjai mindig Aronszajn-nulla halmazt alkotnak (lsd. [1]).

Vegyük észre, hogy a definícióban a B_n halmazok Borel tulajdonsága nagyon fontos. Ha ezt nem tennénk fel, akkor az egész tér Aronszajn-nulla lenne. Már Sierpiński felbontotta a síkot (kontinuum-hipotézis felhasználásával) két részre úgy, hogy az egyik minden vízszintes, a másik minden függőleges egyenesen 0-mértékű.

Hasonló felbontás lehetséges végtelen dimenziós szeparábilis $\mathcal{B}$ Banach-térben is, sőt, kontinuum-hipotézis nélkül, csak a kiválasztási axióma felhasználásával ([4]):

Legyen $e_1, e_2, \ldots$ egy tetszőleges sorozat, melyre $e_n \notin \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Az

$$F = \mathcal{B} / \operatorname{span}(e_1, e_2, \ldots)$$

faktortér minden eleméből válasszunk ki egy-egy reprezentáns pontot, legyen az így kapott (persze nem Borel) halmaz D, és legyen $B_n \stackrel{\text{def}}{=} D + \operatorname{span}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$. Ekkor valóban $\mathcal{B} = \bigcup_n B_n$, és minden e_n irányú egyenes legfeljebb 1 pontban metszi B_n-et.

Emiatt már annak a bizonyítása sem triviális (persze nem is nehéz), hogy ha egy B Borel-halmazra és $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorokra B minden eltoltja 0 Lebesgue-mértékű halmazban metszi a $\mathrm{span}\,(e_1, \ldots, e_n)$ teret, akkor $B \in \mathcal{A}(e_1, \ldots, e_n)$. A 6. fejezetben látni fogjuk, hogy ennél sokkal több is igaz: tetszőleges B Borel-halmazra a

$$\phi(x) = \lambda_n\big((B + x) \cap \mathrm{span}\,(e_1, \ldots, e_n)\big)$$

függvény Borel-mérhető. Ekkor, B_i-nek választva B azon pontjait, amelyeken keresztül az e_i irányú egyenesek 0-mértékű halmazban metszik B-t, a kapott B_i halmazok Borelek. Persze $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$.

Fubini tételéből azonnal következik, hogy minden Aronszajn-nulla halmaz kocka-nulla. R. R. Phelps bizonyította a következőt ([13]):

5.1. Tétel. *Minden Aronszajn-nulla halmaz Gauss-nulla.*

A bizonyítás alapja a következő tétel:

5.2. Tétel. *Van olyan $T : \mathcal{B} \to \mathcal{H}$ folytonos lineáris injektív leképezés, amelyre $T\mathcal{B}$ sűrű $\mathcal{H}$-ban, és tetszőleges $B \in \mathcal{B}$ Borel-halmazra TB Borel.*

Az 5.2. Tétel bizonyítása. Minden szeparábilis Banach-tér tekinthető $C[0,1]$ egy alterének, ezért elég megmutatni, hogy a $C[0,1] \subset L_2(0,1)$ természetes beágyazásnál minden Borel-halmaz képe Borel, utána választhatjuk $\mathcal{H}$-nak $\mathcal{B}$ lezártját L_2-ben.

Ehhez elég bebizonyítani, hogy $C[0,1]$ egységgömbje Borel L_2-ben. Legyen $\mathcal{I}$ a racionális intervallumok halmaza $[0,1]$-en, és legyen $\mathcal{I}_m$ azon racionális intervallumpárok halmaza, amelyek hossza is és távolsága is kisebb $1/m$-nél. Ekkor

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \left\{ f \in L_2 \ : \ \int_I |f| \le |I| \right\}$$

egy zárt halmaz L_2-ben, megmutatjuk, hogy $C[0,1]$ egységgömbje ennek és az

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{(I,J) \in \mathcal{I}_m} \left\{ f \in L_2 \ : \ \left| \frac{1}{|I|} \int_I f - \frac{1}{|J|} \int_J f \right| < 1/n \right\}$$

Borel-halmaznak a metszete.

Az, hogy mindkét halmaz tartalmazza $C[0,1]$ egységgömbjét, triviális. Másrészt tudjuk, hogy $\lim_{I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I f = f(x)$ egy teljes mértékű halmazon. Így ha egy f függvény eleme N-nek, akkor egyenletesen folytonos egy teljes mértékű halmazon, azaz m.m. megegyezik egy $C[0,1]$-beli függvénnyel. Ezek után $f \in M$ biztosítja, hogy benne van az egységgömbben. ■

Az 5.1. Tétel bizonyítása. Legyen A egy Aronszajn-nulla halmaz, μ egy nemelfajuló Gauss-mérték, és válasszunk egy $T : \mathcal{B} \to \mathcal{H}$ leképezést, amely kielégíti az 5.2. Tétel feltételeit.

Ekkor $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \mu \circ T^{-1}$ egy nemelfajuló Gauss-mérték $\mathcal{H}$-n, legyen $e_1, e_2, \ldots$ egy ortonormált bázis a ν-höz tartozó nyom-osztályú operátor sajátértékeiből. Tudjuk, hogy A felírható $\bigcup_n A_n$ alakban, ahol A_n 0 Lebesgue-mértékű minden $T^{-1}e_n$ irányú egyenesen, és ν 1-dimenziós nemelfajuló ν_n Gauss-mértékek szorzata. Ekkor TA_n 0-mértékű minden e_n irányú egyenesen, így $\nu_n(x + TA_n) = 0$ minden x-re. Fubini tétele alapján $\nu(TA_n) = 0$, ez teljesül minden n-re, tehát $0 = \nu(TA) = \mu(A)$. ■

A Banach-terek elméletében, különösen a Banach-tereken értelmezett mértékek differenciálásakor fontos szerepet játszanak az úgynevezett *Radon–Nikodým-tulajdonságú,* vagy röviden *RNP* terek. A Radon–Nikodým-tulajdonságnak számos ekvivalens definíciója ismert – az ekvivalencia bizonyítása általában nem triviális. Ezek azok a terek, ahol a mértékek differenciálhatóak, érvényes a valós esetben jól ismert Radon–Nikodým-tétel. Számunkra most a következő tulajdonságuk (vagy ha úgy tetszik, definíciójuk) miatt érdekesek:

Definíció. Egy $\mathcal{B}$ Banach-tér *RNP,* ha minden $f : [0,1] \to \mathcal{B}$ abszolút folytonos függvény m.m. differenciálható.

Bebizonyítható, hogy $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$, sőt minden olyan tér, amely szeparábilis és konjugált (pl. a szeparábilis reflexív terek), *RNP.*

Legtöbbször azonban nem a $[0,1]$ intervallumon, hanem egy Banach-téren szeretnénk deriválni:

Definíció. Egy $\mathcal{B}$ Banach-térből egy másik Banach-térbe képező f függvény *Gâteaux-differenciálható* az x_0 pontban, ha van a terek között olyan korlátos lineáris T operátor, amellyel minden $u \in \mathcal{B}$-re teljesül

$$Tu = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t}.$$

Azaz, egy függvény pontosan akkor Gâteaux-differenciálható, ha minden egyenesen külön-külön differenciálható, és ezek a deriváltak együtt egy korlátos lineáris leképezését alkotják az irányoknak.

A definíció gyengébb, mint a véges dimenziós esetben megszokott derivált-fogalom, mert most nem követeljük meg, hogy a különböző irányokban a limesz egyenletes legyen. Például, a síkon értelmezett

$$f(0,0) = 0; \quad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^6 + y^2}, \quad \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

függvény nem folytonos a 0-ban, és ott mégis Gâteaux-differenciálható!

Megmutatjuk, hogy egy szeparábilis Banach-térből egy *RNP* térbe képező Lipschitz-leképezés minden pontban Gâteaux-differenciálható, kivéve egy Aronszajn-nulla halmaz pontjaiban. Ehhez szükségünk lesz a következő Lemmára:

Lemma. *Legyen $\mathcal{B}$ szeparábilis Banach-tér, és f Lipschitz-leképezés $\mathcal{B}$ egy nyílt részhalmazából egy RNP térbe. Legyen G sűrű additív részcsoport $\mathbf{R}^n$-ben, és tegyük fel, hogy valamely x_0-ra és minden $u \in G$-re létezik*

$$D(x_0)u \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t},$$

és ez u-nak additív függvénye. Ekkor f Gâteaux-differenciálható x_0-ban.

Bizonyítás. A $h_t(u) = \big(f(x_0+tu) - f(x_0)\big)/t$ függvények egyenlő mértékben folytonosak, sőt Lipschitzek, ugyanazzal a Lipschitz-konstanssal, mint f. Így $D(x_0)u$ létezik minden $u \in \mathrm{cl}\,(G) = \mathcal{B}$-re, és nyilván additív függvénye u-nak. Ebből már következik, hogy $D(x_0)$ lineáris operátor, és az is könnyen látható, hogy korlátos, f Lipschitz-konstansa egy megfelelő korlát. ■

Szükségünk lesz a következő definícióra:

Definíció. Egy $A \in \mathcal{B}$ halmaz *porózus az $x \in A$ pontban,* ha van olyan $r_1, r_2, \ldots$ 0-hoz tartó sorozat, $0 < c < 1$ valós szám és léteznek A-tól diszjunkt $cr_1, cr_2, \ldots$ sugarú $B_1, B_2, \ldots$ gömbök, melyek rendre benne vannak az x pont $r_1, r_2, \ldots$ sugarú környezetében. Az A halmazt *porózusnak* hívjuk, ha minden pontjában porózus, végül *A σ-porózus halmaz,* ha megszámlálható sok porózus halmaz uniója.

Lebesgue sűrűségi tételéből azonnal következik, hogy $\mathbf{R}^n$-ben minden porózus halmaz, és így minden σ-porózus halmaz is 0-mértékű.

A most következő tételt N. Aronszajn bizonyította először, az itt látható bizonyítás D. Preiss-tól és L. Zajíček-től származik:

5.3. Tétel. *Legyen $\mathcal{C}$ Radon–Nikodým tulajdonságú Banach-tér, és f Lipschitz-leképezés $\mathbf{R}^n$ egy U nyílt részhalmazából $\mathcal{C}$-be. Ekkor f az U minden pontjában Gâteaux-differenciálható, kivéve egy Aronszajn-nulla halmaz pontjaiban.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan feltehető, hogy f értelmezve van az egész $\mathbf{R}^n$-en. A *RNP* definíciójából következik, hogy az iránymenti deriváltak m.m. léteznek, így a fenti Lemma alapján csak azt kell bebizonyítani, hogy rögzített $u \neq 0$ és $v \neq 0$ vektorok esetén azon x-ek halmaza, melyekre nem létezik $D(x)(u+v)$, vagy pedig létezik, de nem egyenlő a $D(x)u + D(x)v$ összeggel, nullmértékű. Ennél többet fogunk bizonyítani: megmutatjuk, hogy ez a halmaz mindig σ-porózus.

Jelöljük $A(k,y,z)$-vel azon x-ek halmazát, amelyekre

(i)
$$\frac{\big\|f(x+tu)-f(x)-ty\big\|}{|t|} \le 1/k \quad \forall 0<|t|\le 1/k;$$

(ii)
$$\frac{\big\|f(x+tv)-f(x)-tz\big\|}{|t|} \le 1/k \quad \forall 0<|t|\le 1/k;$$

(iii)

$$\limsup_{s\to 0} \frac{\left\|f\big(x+s(u+v)\big)-f(x)-s(y+z)\right\|}{|s|} > 3/k.$$

Elég bebizonyítani, hogy $A(k,y,z)$ porózus minden y,z-re és k egészre.

Legyen f Lipschitz-konstansa L. Minden $x \in A(k,y,z)$-hez válasszunk olyan s és w számokat, amelyre $0<|s|<1/k$, $\left\|f\big(x+s(u+v)\big)-f(x)-s(y+z)\right\| > 3|s|/k$, és $\|w\| < |s|/2kL$. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\left\|f(x+su+w+sv)-f(x+su+w)-sz\right\| \\
&\geq \left\|f(x+su+sv)-f(x+su)-sz\right\| - 2L\|w\| \\
&\geq \left\|f(x+su+sv)-f(x)-s(y+z)\right\| - 2L\|w\| - |s|/k > |s|/k,
\end{aligned}$$

így $x+su+w$ nem eleme $A(k,y,z)$-nek. Ez azt jelenti, hogy az $x+su$ középpontú, $|s|/2kL$ sugarú gömb diszjunkt $A(k,y,z)$-től. ∎

Ebből már gyorsan következik az alábbi tétel:

5.4. Tétel. *Legyen $\mathcal{B}$ szeparábilis Banach-tér, és $\mathcal{C}$ RNP. Ekkor egy $f:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ Lipschitz-függvény egy Aronszajn-nulla halmaz kivételével mindenütt Gâteaux-differenciálható.*

Bizonyítás. A fenti Lemma fontos következménye, hogy azon pontok, ahol f differenciálható, mindig Borel-halmazt alkotnak. Megint feltehető, hogy f az egész $\mathcal{B}$ téren értelmezve van.

Legyenek $x_1, x_2, \ldots$ lineárisan független vektorok, melyek sűrű alteret feszítenek $\mathcal{B}$-ben, és legyen $V_n \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Jelöljük D_n-el azon x-ek halmazát, ahol f-nek létezik az u irányú deriváltja minden $u \in V_n$-re, és ez u-nak lineáris függvénye. A Lemma alapján f a $\bigcap_n D_n$ halmaz minden pontjában Gâteaux-differenciálható, azt kell megmutatnunk, hogy $\mathcal{B}\setminus(\bigcap_n D_n) \in \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots)$.

Az 5.3. Tétel alapján minden rögzített y-ra $\big((\mathcal{B}\setminus D_n)+y\big)\cap V_n$ 0-mértékű a V_n euklideszi térben, és $\mathcal{B}\setminus D_n$ Borel, így $\mathcal{B}\setminus D_n \in \mathcal{A}(x_1,\ldots,x_n)$. ∎

6. Minden kocka-nulla halmaz Aronszajn-nulla

A dolgozat fő eredménye az alábbi, korábban nem ismert tétel:

6.1. Tétel. *Szeparábilis Banach-térben minden kocka-nulla halmaz Aronszajn-nulla.*

Vizsgáljuk először a szeparábilis Hilbert-terek speciális esetét. Ehhez bevezetünk néhány jelölést.

Jelölések. Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér.

(i) rögzítsünk egy $e_1, e_2, \ldots$ ortonormált bázist, és egy $x \in \mathcal{H}$ pontra legyen $x^{(i)}$ az x i-edik koordinátája. Legyen $I_1, I_2, \ldots$ a valós racionális zárt intervallumok egy felsorolása, és egy rögzített $\underline{s} \stackrel{\text{def}}{=} (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ sorozatra legyen

$$C_{\underline{s}} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{H} : x^{(i)} \in I_{s_i},\ i = 1, 2, \ldots k\}.$$

(ii) Egy rögzített $B \subset \mathcal{H}$ Borel-halmazra és $x \in \mathcal{H}$-ra legyen

$$T_B^{\underline{s}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{(r_1, r_2, \ldots, r_k) \in \mathbf{R}^k : x + r_1 e_1 + r_2 e_2 + \ldots + r_k e_k \in B \cap C_{\underline{s}}\}.$$

(iii) Könnyen látható, hogy ekkor $T_B^{\underline{s}}(x)$ egy Borel-halmaz $\mathbf{R}^k$-ban, jelöljük a mértékét $f_B^{\underline{s}}(x)$-el:

$$f_B^{\underline{s}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(T_B^{\underline{s}}(x)).$$

(iv) Minden B Borel-halmazra, $\underline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ sorozatra és c nemnegatív számra definiáljuk a $B^{\underline{s}\,c}$ halmazt a következőképpen: ha $s = \emptyset$, akkor legyen $B^{\emptyset c} \stackrel{\text{def}}{=} B$. Legyen $B^{s_1 c}$ azon B-beli pontok halmaza, amelyeken keresztülmenő e_1 irányú egyenes I_{s_1}-ben levő részén a B halmaz nagy, azaz

$$B^{s_1 c} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in B : f_B^{s_1}(x) \geq c|I_{s_1}|\}.$$

Ugyanígy, ha $B^{\underline{s}^*c}$-t már definiáltuk az $\underline{s}^* = (s_1, s_2, \ldots, s_{k-1})$ sorozatra, akkor legyen $B^{\underline{s}\,c}$ azon $B^{\underline{s}^*c}$-beli pontok halmaza, melyeken keresztülmenő $e_1, e_2, \ldots, e_k$ által feszített k-dimenziós altér megfelelő téglájában $B^{\underline{s}^*c}$ nagy, vagyis

$$B^{\underline{s}\,c} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in B^{\underline{s}^*c} : f^{\underline{s}}_{B^{\underline{s}^*c}}(x) \geq c \prod_{i=1}^{k} |I_{s_i}|\right\}.$$

Bebizonyítjuk, hogy ha B zárt, akkor a $B^{\underline{s}\,c}$ halmazok is zártak, és ha B Borel, akkor a $B^{\underline{s}\,c}$ halmazok is Borelek.

Legyen először B zárt, megmutatjuk, hogy ekkor az $\{x : f_B^{\underline{s}}(x) \geq c\}$ nívóhalmazok is zártak. Ehhez az kell, hogy $x_n \to x$, $f_B^{\underline{s}}(x_n) \geq c$ esetén $f_B^{\underline{s}}(x) \geq c$ legyen.

Ha valamely $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ sorozatra $x_n^{(i)} + r_i \in I_{s_i}$, akkor r_i eleme az $I_{s_i} - x_n^{(i)}$ intervallumnak. Mivel $x_n \to x$, ezért $x_n^{(i)} \to x^{(i)}$, vagyis elég nagy n-re $T_n \stackrel{\text{def}}{=} T_B^{\underline{s}}(x_n)$ benne van $\mathbf{R}^k$ egy rögzített téglájában. Mivel $\lambda(T_n) \geq c$, ezért $\lambda(\limsup T_n) \geq c$, azaz elég megmutatni, hogy $(r_1, r_2, \ldots, r_k) \in \limsup T_n$ esetén $x + r_1 e_1 + r_2 e_2 + \ldots + r_k e_k \in B \cap C_{\underline{s}}$. Ez B zártságából azonnal következik.

Ezzel $\{x : f_B^{\underline{s}}(x) \geq c\}$ zártságát bebizonyítottuk, így a $B^{\underline{s}\,c}$ halmazok is zártak.

Ha B nem zárt, csak Borel, az $f_B^{\underline{s}}(x)$ függvény akkor is biztosan Borel-mérhető, mivel $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ illetve $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ esetén az $f^{\underline{s}}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}$ illetve $f^{\underline{s}}_{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n}$ függvény az $f^{\underline{s}}_{B_n}$ (Borel-mérhető) függvények pontonkénti határértéke. Így a $B^{\underline{s}\,c}$ halmazok valóban Borelek.

A definícióból világos, hogy $B_1 \subset B_2$ és $c \geq d$ esetén $B_1^{\underline{s}\,c} \subset B_2^{\underline{s}\,d}$. Továbbá, könnyen látható, hogy $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ növő sorozat, $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ és $c > d$ esetén

$$B^{\underline{s}\,c} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^{\underline{s}\,d}$$

teljesül minden $\underline{s}$-re, és $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ csökkenő sorozat, $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ esetén

$$B^{\underline{s}c} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^{\underline{s}\,c}.$$

Ezen előkészületek után rátérhetünk a tétel bizonyítására. Legyen először $B \subset \mathcal{H}$ egy Borel-halmaz, amelyre $B \notin \mathcal{A}(e_1, e_2 \ldots)$. Megmutatjuk, hogy ekkor B nem kocka-nulla.

Mivel $B \notin \mathcal{A}(e_1)$, ezért a „legtöbb" e_1 irányú egyenesen B pozitív mértékű. Egy pozitív mértékű halmaz m.m. pontja Lebesgue-sűrűségi pont, vagyis tetszőleges $c < 1$-re az e_1 irányú egyeneseken B m.m. pontjához választható egy rövid racionális I intervallum, amelyet B legalább $c|I|$ mértékű halmazban metsz. Precízebben: tetszőleges $\varepsilon, c > 0$-ra

$$B \setminus \Big(\bigcup_{\sigma : |I_\sigma| < \varepsilon} B^{\sigma\, c} \Big) \in \mathcal{A}(e_1).$$

Az is könnyen látható (Fubini-tétel segítségével), hogy tetszőleges $\underline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ sorozat, $\varepsilon > 0$ és $1 > c > d > 0$ számok esetén, minden B Borel-halmazra teljesül

$$B^{\underline{s}\,c} \setminus \Big(\bigcup_{\sigma : |I_\sigma| < \varepsilon} B^{(\underline{s},\sigma) d} \Big) \in \mathcal{A}(e_{k+1}). \tag{4}$$

Rögzítsünk egy c_1-et és egy ε_1-et. Ekkor tehát

$$B \setminus \Big(\bigcup_{\sigma : |I_\sigma| < \varepsilon_1} B^{\sigma\, c_1} \Big) \in \mathcal{A}(e_1),$$

így mivel $B \notin \mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots)$, ezért biztosan van olyan $\sigma = s_1$, amelyre $|I_{s_1}| < \varepsilon_1$, és

$$B^{s_1 c_1} \notin \mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots).$$

Ezek után ugyanígy egy tetszőleges $c_2 < c_1$ konstanst és egy ε_2-t választva (4) alapján van egy olyan $\sigma = s_2$, amelyre

$$B^{(s_1 s_2) c_2} \notin \mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots),$$

és így tovább, egy tetszőleges $c_1 > c_2 > \ldots$, és $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ sorozathoz gyárthatunk egy $B \supset B^{s_1 c_1} \supset B^{(s_1 s_2) c_2} \supset \ldots$ halmaz-sorozatot. Legyen ezen halmazok metszete B^*.

Jelöljük a $\prod_{n=1}^{\infty} I_{s_n}$ kockát C-vel. A $B^* \subset C$ halmazunknak megvan az a kellemes tulajdonsága, hogy bármely pontján keresztül húzott e_1 irányú egyenes legalább $c_1|I_{s_1}|$ (lineáris) mértékű halmazban metszi C-t, bármelyik pontján keresztülfektetett e_1, e_2 irányú síkmetszete legalább $c_2|I_{s_1}|\,|I_{s_2}|$ mértékű, stb. Abban reménykedhetnénk, hogy ekkor B^* mértéke a C kockában a megfelelő kocka-mérték szerint legalább $\lim c_n$. Ez esetben csak egy konvergens $c_n \to c > 0$ sorozatot kell választanunk, és készen vagyunk.

De sajnos vannak mindenféle problémák. A B^* metszet akár üres is lehet, és akkor hiába a fenti „kellemes" tulajdonság. Semmi sem garantálja továbbá, hogy a $\prod_{n=1}^{\infty} I_{s_n}$ „kocka" valóban a Hilbert-térben van, ahhoz nekünk konvergens négyzetösszegek kellenének. Végül, de nem utolsósorban: ha ezekkel nincs gond, akkor sem biztos, hogy B^* mértéke legalább $\lim c_n$; lehet akár 0 is, gondoljunk az $\{x \in \mathcal{H} : \text{csak véges sok } x^{(i)} \text{ nem } 0\}$ halmazra. Ez minden pontján keresztül a teljes egyenest, síkot, stb. tartalmazza, mégis 0-mértékű, hiszen megszámlálható sok véges dimenziós altér uniója!

Annál meglepőbb és fontosabb a következő észrevétel:

Lemma. *Ha $B^* \neq \emptyset$ és zárt, továbbá $\varepsilon_n < 1/2^n$, akkor a $\prod_{n=1}^{\infty} I_{s_n}$ kocka benne van a Hilbert-térben, és B^* mértéke a kockában legalább $\lim c_n$.*

Bizonyítás. Az, hogy a kocka benne van a térben, triviális, mert van legalább egy pontja ($B^* \neq \emptyset$ miatt), az élei pedig konvergens négyzetösszegűek.

Jelöljük az e_1 irányú egyenesre való vetítést P_1-gyel, az e_1, e_2 által meghatározott síkra való vetítést P_2-vel, stb, és legyen

$$B_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{H} : \exists y \in B^*,\ P_n(x) = P_n(y)\}.$$

Ekkor B_n^* kocka-mértéke nyilván legalább c_n, és $B^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^*$ (mert B^* zárt), tehát B^* mértéke valóban legalább $\lim c_n$. ∎

Már csak az a kérdés, hogyan lehet a Lemma feltételeit biztosítani. Az $\varepsilon_n < 1/2^n$ nem probléma, ε_n értékét tetszőlegesen választottuk. A metszet nemüressége és zártsága sokkal nehezebb ügy.

Ha B kompakt halmaz volt, akkor a metszet biztosan nemüres és zárt, hiszen ekkor kompakt halmazokat metszünk össze. Vagyis ha találnánk B-ben egy kompakt K részhalmazt, amelyre $K \notin \mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots)$, akkor készen lennénk. Sajnos ilyen kompakt részhalmaz nem biztos, hogy létezik.

Ha B nem kompakt, de zárt, akkor legalább azt tudjuk, hogy a metszet zárt lesz, csak hát lehet, hogy üres. Ez esetben csináljuk a következőt:

Tudjuk, hogy minden $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ sorozatra és $0 < \varepsilon$, $0 < d < c < 1$-re teljesül (4). Ezért biztosan létezik egy olyan $x_0 \in B$, amelyre

$$x_0 \notin B^{\underline{s}\,c} \setminus \Big(\bigcup_{\sigma\,:\,|I_\sigma|<\varepsilon} B^{(\underline{s},\sigma)d} \Big) \tag{5}$$

teljesül minden $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ sorozatra és minden $0 < \varepsilon$, $0 < d < c < 1$ racionális számra, hiszen ez csak megszámlálható sok halmaz. Válasszunk tehát egy pozitív határértékű $c_1 > c_2 > \ldots$ racionális sorozatot, $\varepsilon_n < 1/2^n$ racionális számokat, és az első lépésben válasszunk olyan s_1-et, amelyre $|I_{s_1}| < \varepsilon_1$ és $x_0 \in B^{s_1 c_1}$ (ilyen s_1 (5) miatt biztosan létezik). A következő lépésben válasszunk olyan s_2-t, amelyre $|I_{s_2}| < \varepsilon_2$ és $x_0 \in B^{(s_1 s_2)c_2}$, stb., végül B^*-ban benne lesz az x_0, és készen is vagyunk.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy ha $B \notin \mathcal{A}(e_1, e_2 \ldots)$ és zárt, akkor nem kockanulla, de hátra van még a tetszőleges Borel-halmaz esete. Az a célunk, hogy egy Borel-halmazt zárt halmazokból „építsünk fel".

Ez valóban lehetséges, az úgynevezett *Szuszlin-operáció* segítségével. Ismert eredmény a leíró halmazelméletben, hogy minden B Borel-halmaz felírható

$$B = \bigcup_{\underline{n}} \bigcap_{k} F_{n_1 n_2 \cdots n_k} \tag{6}$$

alakban, ahol

(i) minden $F_{n_1 n_2 \cdots n_k}$ halmaz zárt;

(ii) $F_{n_1 n_2 \cdots n_k} \supset F_{n_1 n_2 \cdots n_k n_{k+1}}$;

(iii) $F_{n_1 n_2 \cdots n_k} \subset F_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}(n_k+1)}$;

(iv) a $B_{n_1 n_2 \cdots n_k} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\underline{m}} \bigcap_l F_{n_1 n_2 \cdots n_k m_1 m_2 \ldots m_l}$ halmazok Borelek.

Ezek után válasszunk egy x_0-t, amelyre

$$x_0 \notin B^{\underline{s}\,c}_{n_1 n_2 \cdots n_k} \setminus \Big(\bigcup_{\sigma:|I_\sigma|<\varepsilon} B^{(\underline{s},\sigma)d}_{n_1 n_2 \cdots n_k} \Big)$$

minden $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$-ra és minden $0 < \varepsilon$, $0 < d < c < 1$ racionális számra. Válasszunk egy $1 > c_0 > c_1 > c_2 > \ldots > c > 0$ racionális sorozatot. Ekkor:

$$x_0 \in B = \bigcup_{n_1} B_{n_1} \Longrightarrow \exists n_1 \,:\, x_0 \in B_{n_1} = B^{\emptyset\, c_0}_{n_1}$$

$$x_0 \notin B^{\emptyset, c_0}_{n_1} \setminus \bigcup_{s_1:|I_{s_1}|<1/2} B^{s_1\, c_1}_{n_1} \Longrightarrow \exists s_1 \,:\, |I_{s_1}| < 1/2 \quad \text{és} \quad x_0 \in B^{s_1\, c_1}_{n_1}$$

$$B_{n_1 n_2} \nearrow B_{n_1} \Longrightarrow B_{n_1}^{s_1\, c_1} \subset \bigcup_{n_2} B_{n_1 n_2}^{s_1\, c_2} \Longrightarrow \exists n_2 \,:\, x_0 \in B_{n_1 n_2}^{s_1\, c_2}$$

$$x_0 \notin B_{n_1 n_2}^{s_1\, c_2} \setminus \bigcup_{s_2 : |I_{s_2}| < 1/4} B_{n_1 n_2}^{s_1 s_2\, c_3} \Longrightarrow \exists s_2 \,:\, |I_{s_2}| < 1/4 \quad \text{és} \quad x_0 \in B_{n_1 n_2}^{s_1 s_2\, c_3}$$

$$B_{n_1 n_2 n_3} \nearrow B_{n_1 n_2} \Longrightarrow B_{n_1 n_2}^{s_1 s_2\, c_3} \subset \bigcup_{n_3} B_{n_1 n_2 n_3}^{s_1 s_2\, c_4} \Longrightarrow \exists n_3 \,:\, x_0 \in B_{n_1 n_2 n_3}^{s_1 s_2\, c_4}$$

Ezt így folytatva

$$x_0 \in \bigcap_k B_{n_1 n_2 \cdots n_k}^{s_1 s_2 \ldots s_k\, c},$$

és nyilván

$$\bigcap_k B_{n_1 n_2 \cdots n_k}^{s_1 s_2 \ldots s_k\, c} \subset \bigcap_k F_{n_1 n_2 \cdots n_k}^{s_1 s_2 \ldots s_k\, c} \subset F,$$

ahol

$$F \overset{\text{def}}{=} \bigcap_k F_{n_1 n_2 \cdots n_k}. \tag{7}$$

(6) és (7) alapján $F \subset B$, és $F_{n_1} \supset F_{n_1 n_2} \supset \ldots$ miatt

$$\bigcap_k F^{\underline{s}\, c} = \bigcap_k \Big(\bigcap_l F_{n_1 n_2 \ldots n_l} \Big)^{\underline{s}\, c} = \bigcap_k \bigcap_l F_{n_1 n_2 \ldots n_l}^{\underline{s}\, c} \ni x_0,$$

vagyis A egy F zárt részhalmazára találtunk egy nemüres zárt $F^* \overset{\text{def}}{=} \cap F^{\underline{s}\, c}$ halmazt.

Ezzel az állítást tetszőleges $B \notin \mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots)$ Borel-halmazra bebizonyítottuk.

A további nehézségek ($e_1, e_2, \ldots$ sorozat helyett tetszőleges olyan $x_1, x_2, \ldots$ sorozat, amely sűrű alteret feszít, illetve Hilbert-tér helyett Banach-tér) már csak technikaiak.

Legyen $\mathcal{B}$ egy tetszőleges szeparábilis Banach-tér. Közismert a következő lemma:

Lemma. *Minden $x_1, x_2, \ldots \in \mathcal{B}$ sorozathoz, amelyre $\operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots)$ sűrű $\mathcal{B}$-ben, található olyan $e_1, e_2, \ldots \in \mathcal{B}$, $e_1^*, e_2^*, \ldots \in \mathcal{B}^*$ ortogonális rendszer (azaz $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$), amelyre $\bigcap_{i=1}^{\infty} \ker e_i^* = \{0\}$, és az $e_1, e_2, \ldots$ vektorok ugyanazt az alteret feszítik, mint $x_1, x_2, \ldots$.*

Ekkor nyilván $B \in \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots) \iff B \in \mathcal{A}(e_1, e_2, \ldots)$, és az egész bizonyítás megismételhető, csak az „x i-edik koordinátája" helyett mindenütt $\langle e_i^*, x \rangle$-et kell mondanunk (lsd. [7]).

7. Eltérő viselkedés a véges dimenziós esettel szemben

A 0-mértékű halmazok egy fontos (és triviális) tulajdonsága $\mathbf{R}^n$-ben, hogy a Lipschitz-leképezések megőrzik őket, azaz 0-mértékű halmaz Lipschitz-képe 0-mértékű. Ugyanez nem igaz a végtelen dimenziós Hilbert-térben. V. I. Bogachevtől származik a következő tétel ([5]):

7.1. Tétel. *Legyen a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egységgömbje B. Ekkor megadható olyan $A \subset B$ halmaz, amely nem Gauss-nulla, de a képe egy alkalmas $f : B \to \mathcal{H}$ bi-Lipschitz-leképezésnél Aronszajn-nulla. Sőt, megadható olyan A és f, amelyre $f(A)$ minden egyenest legfeljebb 3 pontban metsz.*

Bizonyítás. Legyenek S_1 és S_2 olyan pozitív és nyom-osztályú operátorok $\mathcal{H}$-n, melyekre $S_1\mathcal{H} \cap S_2\mathcal{H} = \{0\}$, és a képük sűrű. Válasszunk egy $\{e_n\}$ ortonormált bázist S_1 sajátvektoraiból, legyen $S_1 e_n = \lambda_n e_n$.

Tekintsük az $S = S_1^3$-höz tartozó μ Gauss-mértéket. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $\lambda_n \to 0$ elég gyorsan, akkor az $S_1\mathcal{H}$ képhalmaz tartója lesz μ-nek, és minden 0-körüli B_0 gömbre $\mu(S_1\mathcal{H} \cap B_0) > 0$.

Legyen $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + \|x\|^2 S_2 x$. Ez C^1 (sőt C^∞), vagyis Lipschitz-tulajdonságú a B_0 gömbökön, és 0-ban a deriváltja az identitás. Ekkor az inverz-leképezés tétel miatt bi-Lipschitz-tulajdonságú egy kis 0-körüli környezetben.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy $f(S_1\mathcal{H})$ minden egyenest legfeljebb 3 pontban metsz. Tegyük fel, hogy valamely $x, y, z \in S_1\mathcal{H}$ pontokra és $t \neq 0$-ra $f(x) - f(y) = t\big(f(y) - f(z)\big)$, és $x \neq y$. Mivel $S_1\mathcal{H} \cap S_2\mathcal{H} = \{0\}$, ezért ekkor

$$x - y = t(y - z) \quad \text{és} \quad \|x\|^2 S_2 x - \|y\|^2 S_2 y = t\big(\|y\|^2 S_2 y - \|z\|^2 S_2 z\big).$$

Ebből S_2 injektivitása alapján

$$t^2\left(\|x\|^2 x - \|y\|^2 y\right) = t^3\|y\|^2 y - \|(t+1)y - x\|^2\left((t+1)y - x\right),$$

ami egy nem-triviális másodfokú egyenlete t-nek, mert $\|(t+1)y - x\|^2$ kifejtésekor a harmadfokú tag kiesik, és a 0 nem gyöke. Vagyis legfeljebb egy megoldása lehet a $t = -1$-en kívül. ∎

A fenti jelenség nemcsak az Aronszajn-nulla halmazokkal hanem a Haar-nulla halmazokkal is előfordul. E. Matoušková ([11]) egy, a közelmúltban bebizonyított tétele alapján a Haar-nulla halmazok sem invariánsak a bi-Lipschitz homeomorfizmusokra.

Talán ennél is meglepőbb a következő, D. Preiss-tól és J. Tišer-től származó tétel ([14]), amely azt mutatja, hogy egy végtelen dimenziós Banach-térben a σ-porózus halmazok lehetnek nagyon nagyok:

7.2. Tétel. *Minden szeparábilis végtelen dimenziós $\mathcal{B}$ Banach-tér felbontható egy Aronszajn-nulla és egy σ-porózus halmaz uniójára.*

Bizonyítás. Normalizáljuk a tér minden egyenesén a Lebesgue-mértéket $\mathcal{B}$ normája szerint, és legyen $\{x_n\}$ egy rögzített sűrű sorozat. Válasszunk egy $\{z_n\}$ sorozatot, amelyre $\|x_n - z_n\| \leq 11/2$, és $d(z_n, \operatorname{span}(z_1, \ldots, z_{n-1})) > 5$. Ekkor a z_n pontok körüli 6 sugarú gömbök uniója lefedi a teret, jelöljük a z_n pontok körüli 1 sugarú gömbök unióját G-vel.

Rögzítsünk egy l egyenest, és minden olyan z_n pontra, amelyre $d(z_n, l) < 1$, válasszunk egy w_n pontot l-en, amelyre $\|z_n - w_n\| < 1$. Könnyen ellenőrizhető, hogy bármely két w_i pont távolsága legalább 3, és bármely $i < j < k$-ra w_k távolsága a $[w_i, w_j]$ szakasztól legalább $\|w_i - w_j\|$. Ebből indukcióval következik, hogy a w_i pontok tetszőleges n elemű részhalmazának az átmérője legalább 2^{n-1}.

Ekkor az l egyenes bármely két x, y pontjára, melyek távolsága nagyobb, mint 1, pontosabban $2^{m-1} < \|x - y\| \leq 2^m$ valamely pozitív egész m-re, az $[x, y]$ szakasz legfeljebb $m + 1$ db G-beli gömböt metszhet. Ezért a metszet Lebesgue-mértéke legfeljebb $2(m+1) \leq \frac{m+1}{2^{m-2}}\|y-x\|$. Tehát minden $k \geq 1$-re van olyan s_k pozitív szám, hogy a tér bármely $t \geq s_k$ hosszúságú szakasza legfeljebb $\frac{1}{2^k}t$ mértékű halmazban metszi G-t.

Ezek után legyen $G_k = \frac{1}{2^k s_k}G$, ekkor a $t \leq \frac{1}{2^k}$ hosszúságú szakaszok legfeljebb $\frac{t}{2^k}$ mértékű halmazban metszik G_k-t, így biztosan 0 mértékű halmazban metszik $\limsup G_k$-t. Másrészt, $\limsup G_k$ komplementere σ-porózus, hiszen a z_n középpontú 6 sugarú gömbök a teret lefedték. ■

Hivatkozások

[1] N. Aronszajn, Differentiability of Lipschitz mappings between Banach spaces, *Studia Math.*, **57** (1976), 147–190.

[2] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, Geometric Nonlinear Functional Analysis, előkészületben.

[3] P. Billingsley, *Convergence on Probability Measures,* Wiley (1968).

[4] V. I. Bogachev, Negligible sets in locally convex spaces, *Mat. Zametki,* **36** (1984), 51–64 (oroszul).

[5] V. I. Bogachev, Some results on differentiable measures, *Math. USSR-Sb.*, **55** (1986), 335–349.

[6] J. P. R. Christensen, On sets of Haar measure zero in Abelian Polish groups, *Israel J. Math.*, **13** (1972), 255–260.

[7] M. Csörnyei, Aronszajn null and Gaussian null sets coincide, *Israel J. Math.*, **111** (1999), 191-201.

[8] A. Hinchin, Correlation theory of stationary random processes, *Uspehi. Mat. Nank.* (1938), 42–51 (oroszul).

[9] W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, Handbook on the Geometry of Banach spaces, előkészületben.

[10] P. Mankiewicz, On the differentiability of Lipschitz mappings in Fréchet spaces, *Studia Math.*, **45** (1973), 15–29.

[11] E. Matoušková, Lipschitz images of Haar null sets, *Bull. London Math. Soc.*, **32** (2000), 235–244.

[12] R. A. Milnos, Generalized random processes, *Trudy Mosk. Mat. Ob.*, **8** (1959), 497–518 (oroszul).

[13] R. R. Phelps, Gaussian null sets and differentiability of Lipschitz maps on Banach spaces, *Pacific J. Math.*, **77** (1978), 523–531.

[14] D. Preiss and J. Tišer, Two unexpected examples concerning differentiability of Lipschits functions on Banach spaces, GAFA Israel Seminar 92–94, 219–238. Birkhäuser, 1995. (edited by V. D. Milman and J. Lindenstrauss).

[15] D. Renfro, A study of porous and σ-porous sets, előkészületben.

[16] V. V. Sazonov, A remark on characteristic functionals, *Teor. Ver. i ee Prim.*, **3** (1958), 201–203 (oroszul).

Marianna Csörnyei: How large is the small if the space is big? (Null sets in Banach spaces)

In this paper we study the basic properties of Haar, Gauss, cube and Aronszajn null sets in separable Banach spaces, and prove that the σ-ideal of Aronszajn, Gauss and cube null sets coincide. In addition, we study many standard results of the geometry of Banach spaces corresponding to measures and null sets, in a survey form.

FERMAT PLUS

DEÁK JÓZSEF

Fermat nagy sejtésének közelmúltbeli megoldása végre megnyugtató módon lezárta az évszázados ostromot. A matematikával foglalkozó intézmények és kiadók fellélegezhetnek: több e témával foglalkozó bizonyítással nem kell küszködniük. Néhány kérdés azonban maradt.

Elsőként Fermat kijelentése, amely szerint egyszerű bizonyítást talált. Ezzel szemben a probléma megoldásához korántsem egyszerű eszközök kellettek. Másrészt pedig – e sorok írójának véleménye szerint – a sejtés megfogalmazásának hátterében egy sokkal mélyebb probléma húzódik. Ha megvizsgáljuk az

$$a^n + b^n = c^n$$

diofantoszi egyenletet, azt találjuk, hogy megoldás csak akkor létezik, ha $n = 2$. Ez volt a sejtés, ami bizonyítást nyert. Most gondolkozzunk el azon, hogy – csupán prímszámokra szorítkozva – nem lehet-e a háttérben meghúzódó szabályszerűség egy magasabb egység része? Nem lehetséges, hogy a hasonló

$$a^p + b^p + c^p = d^p, \tag{1}$$

vagy az általános

$$a_1^p + a_2^p + \ldots + a_p^p = a_0^p \tag{2}$$

alakban megfogalmazott egyenletnek mindig van megoldása a pozitív egész számok körében? Nézzünk néhány példát.

a_1	a_2	a_3	a_0
3	4	5	6
6	32	33	41
16	23	41	44
27	30	37	46
3	36	37	46

Ezek az értékek $p = 3$-ra vonatkoznak. $p = 5$-re a következőket adhatjuk meg: 21, 23, 37, 79, 84 és 94. Ezek a számok kielégítik (2)-t. (Láthatjuk, hogy a felbontás nem feltétlen egyértelmű.)

Euler sejtése szerint egy k-ik hatvány sohasem áll elő k-nál kevesebb k-ik hatvány összegeként. Ugyanakkor megadta (2) összes megoldását, ha $p = 3$. Sejtésére ellenpéldát talált Lander és Parkin: $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$, [Math. Comp. **21** (1967), 101–103]. 1988-ban Noam Elkies talált ellenpéldát a $k = 4$ esetre, s az ő sikere azt bizonyítja, hogy negyedik hatványokra végtelen sok megoldás van. A legkisebb közülük a következő: $95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$. Elkies cikke is a Math. Comp.-ban jelent meg, [**51** (1988), 825].

Most Euler ellenében megfogalmazunk egy pozitív sejtést:

Minden p prímre igaz az, hogy az

$$a_1^p + a_2^p + \ldots + a_p^p = a_0^p$$

egyenletnek létezik megoldása pozitív egész $a_1, a_2, \ldots, a_p, a_0$-val.

Emellé a sejtés mellé kívánkozik egy *paralel sejtés,* nevezetesen, hogy a fenti (2) egyenlet megoldhatósága mellett nincs olyan $p' < p$ prím, hogy p' darab pozitív egész szám p-ik hatványának összege egy egész szám p-ik hatványa lehetne, ha p és p' nem ikerprímek. Mivel prímekről van szó, nyilván $p' \leq p - 2$.

Érdemes szétválasztani a lehetőségeket. Ugyanis, ha p' kisebb $(p - 2)$-nél, *érezzük,* hogy ez utóbbi sejtésünk igaz. Ha viszont p' éppen $p - 2$, akkor p és p' *ikerprímek.* Márpedig az ikerprímek okozhatnak meglepetéseket...

Ruzsa Z. Imre jegyezte meg, hogy ha (1)-ben megengedjük a negatív számokat is, akkor az alábbi nevezetes kérdést kapjuk: lehetséges-e, hogy az ötödik hatványokból képezett összegek mind különböznek?

Amennyiben bizonyítva lenne, hogy (2)-ből származtatott sejtésünk kivétel nélkül minden prímre fennáll, akkor Fermat sejtésének új bizonyítását kapnánk.

Deák József

1224 Budapest
Pf. 842

József Deák: Fermat plus

Two conjectures relating Fermat's Last Theorem are posed.

TIERRA

REJTŐ LÍDIA ÉS TUSNÁDY GÁBOR

Összefoglalás

Először S. A. Kauffman The origins of order, Self-organization and selection in evolution című könyve alapján (5. fejezet, 188–209. oldalak, lásd még: U. Bastolla–G. Parisi cikkei) a Boole NK modellt ismertetjük, majd ennek alapján módosítjuk a Tom Ray által bevezetett Tierra modellt (Kauffman könyvében 6. fejezet, 276–277. oldalak, lásd még: Ray cikkei és G. Rowe Theoretical models in biology című könyve). Dolgozatunk fő célja az új modell eddigi vizsgálata alapján szerzett tapasztalatok, és tisztázatlan kérdések összegzése. Másodlagos célunk egy Pascal nyelven írt program ismertetése abban a reményben, hogy az olvasó kedvet kap a futtatásához, vagy ami még jobb, hasonló írásához.

Bevezetés

Az élet önreprodukáló fehérje kolóniák küzdelme. Ha egy véges halmaz elemei közé véletlen éleket húzogatunk, előbb vagy utóbb kialakul olyan körút, amely átvezet az összes ponton. Ezt a gyerek is látja. De hogy ez egy kritikus jelenség, azt Erdős és Rényi vették észre. Azt pedig, hogy ez a kritikus jelenség ad magyarázatot az élet keletkezésére, csak Kauffman képzeli: „valahogy" a kölcsönhatásba kerülő, egymást szintetizáló szerves vegyületekből kialakul egy picike kis zárt rendszer, ami lényegében a nukleotidák és aminosavak kettős pillérén nyugszik, és ez reprodukálja önmagát. Kauffman úgy képzeli, sok más zárt kör is keletkezett, ezek rivalizálásából győzött ez a kettős. Hacsak így nem. Mindabból amit tudunk, szelíden fogalmazva annyit mondhatunk, hogy még senki nem bizonyította be, hogy ez nem igaz.

Amit ugyancsak tud ma már a gyerek is, az az, hogy a „struggle for life" lényegében optimalizálás. Ha az univerzum véges, ahogyan azt a hindu bölcsek képzelik, kódolhatjuk az élőlények struktúráját akár binárisan is. Legyen d a bitek száma, legyen egy élőlény struktúrája az $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ d dimenziós bináris vektor, legyen U a d dimenziós bináris vektorok halmaza (U tehát $n = 2^d$ elemű) és legyen az élőlény sikerességének, életrevalóságának (fitness-ének) a mércéje $f(\varepsilon)$, ez egy U-n értelmezett valós értékű függvény, ezt kell optimalizálni. A szelekció alapelve tömören fogalmazva az, hogy az életrevalóbb a túlélő. Annak idején a kis Aladdin a barlangban tulajdonképpen optimalizált, mégpedig az úgynevezett mohó algoritmussal. No de hogyan bolyongjunk U-n?

Ugrálhatunk össze-vissza, avagy lépegethetünk szisztematikusan: nullától $(n-1)$-ig felírjuk kettes számrendszerben a számokat, és azokat egymás után mind behelyettesítjük f-be. Ha f értékei ε-tól független, azonos eloszlású valószínűségi változók, mást nemigen tehet az ember. De ebben az esetben is megkérdezhetjük, mi történik, ha az ember kicsit rendezettebben bolyong. Ahogyan egy barlangban tenné, egy fülkéből csak a szomszédos fülkékbe kukkantva be, és azok közül ott folytatva az utat, ahol a legnagyobb a célfüggvény. A szomszédosak lehetnek U-n az egyszeres mutáció eredményei, amikor a bitek közül pontosan egyet változtatunk meg, vagy a k-szoros mutácó eredményei, ahol k a d-hez képest kicsi.

Kauffman modelljei

Valós NK modell. Lehet maga az f életrevalóság hasonló struktúrájú:

$$f(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{d} g_i\big(\varepsilon_{\nu(i,1)},\ldots,\varepsilon_{\nu(i,k)}\big), \tag{1}$$

ezt nevezzük az életrevalóság NK modelljének. (Az elnevezésben az N, K betűk eredete az, hogy Kauffman n-nel jelöli azt, amit mi d-vel, a kettőnk k-ja azonos, nálunk viszont $n=2^d$.) Itt $(\nu(i,j),\ j=1,\ldots,k)$ a d koordináta közül tetszés szerint kiválasztott különböző elemű k-as, g_i pedig k változós valós értékű bináris változójú függvény.

Boole NK modell. Azért az sokkal jobb, ha az embernek több Aladdinja van. De nem hagyja őket szabadon mászkálni, egy jó hadsereg ereje a strukturáltsága. Az erőforrásokat csak egy hierarchikusan felépülő központi vezérlés képes hatékonyan felhasználni. Nem világos, hogy így van-e ez az élőlényekben. Elképzelhető, hogy látszólag homogén hálózat köti össze az egyes automatákat. Mindegyik automata az ε állapotvektor valamelyik koordinátáját felügyeli, ennek érdekében meg kell mondanunk a működésük szabályait. Ennek legegyszerűbb alakját úgy kapjuk, ha (1)-ben nemes egyszerűséggel elhagyjuk a szumma jelet, és a g_i függvényeket k változós bináris függvényeknek képzeljük. Vagyis minden egyes g_i-nek csak két lehetséges értéke van (a g_i-k argumentuma eddig is bináris volt):

$$f_i(\varepsilon)=g_i\big(\varepsilon_{\nu(i,1)},\ldots,\varepsilon_{\nu(i,k)}\big),\quad i=1,\ldots,d, \tag{2}$$

ahol most f d dimenziós vektor és f_i az f függvény i-ik koordinátáját jelöli (ez tehát nem fitness).

Ekkor f U-t U-ba képezi, és f segítségével dinamikus rendszert kapunk: U valamelyik állapotából kiindulva mozoghatunk U-ban úgy, hogy minden lépésben

f mondja meg azt, hogy hova lépjünk. Ezt hívjuk Boole NK modellnek, mi az egyszerűség kedvéért ezt a rendszert *Kauffman-állat*-nak fogjuk nevezni. Az f-re vonatkozó két formula között alapvető szemléleti különbség van: (1) arra ad példát, hogyan lehet sokváltozós függvényeket aránylag kevés változósakból felépíteni, (2)-ben hasonló struktúra U-t U-ba vivő függvényt állít elő. Itt tehát a sok kis Aladdin önállósul abban az értelemben, hogy a d bit egymástól függetlenül változik, amikor ε helyére $f(\varepsilon)$ lép. Maga ε most az élőlény állapota, a strukúra szerepét a g_i függvények, és a bennük levő $\nu(i,j)$ kapcsolat kódok veszik át, de az átépítés során elvész az optimalizálandó függvény. Kauffmant ez valahogy nem zavarja észrevehetően, de talán nem csak nekünk hiányzik, ezért dolgozatunk célja e veszteség pótlása. Az az élőlény, aminek ε az állapota, lehet egy egysejtű, ekkor az ε_i-k a sejten belüli enzimek aktivitását tükrözik. De gondolhatunk arra is, hogy a modell egy többsejtű élőlényt ír le, ebben az esetben a struktúra (kapcsolatok rendszere és műveletek kódja) minden egyes sejtben közös, de az állapotok eltérőek. Minden egyes sejt éli a maga életét, vagyis a közös struktúra által meghatározott dinamika szerint változnak állapotai, és a funkcionálisan azonos sejteket a dinamika szerinti azonosságuk köti össze.

Neural networks. Automata hálózatok sok helyen szerepelnek, ezek közül a legismertebb az ideghálózatok modellje, ahol a hálózat kialakítása a tanulási folyamat dolga. Lehet, hogy van mélyebb kapcsolat a két modell között, mindenesetre egy szembeszökő különbség az, hogy az ideghálózatban az idegsejtek két állapota nem szimmetrikus, és bennük a kölcsönhatások monoton összegződnek: minél több aktivizáló impulzust kap egy idegsejt, annál inkább aktivizálódik maga a sejt is. Kauffman modelljében nincs ilyen irányítottság. Lehet, hogy ezzel áll kapcsolatban az, hogy az ideghálózat attraktorai egy pontból állnak, nem jellemző rájuk a ciklizálás.

Két példa. Az 1. táblázat két példát ad $d = 72, k = 3$ mellett. Itt a „műveleti kód" megnevezés azt jelenti, hogy megszámoztuk 0-tól 255-ig a három változós bináris függvényeket, és a g_i-ket ezzel a sorszámukkal adjuk meg (lásd 2. táblázat), a p_i számok 3000 ciklusban az 1 bit relatív gyakoriságai, az r_i számok pedig a műveleti táblákban az eggyel egyenlő függvényértékek számai (erre még visszatérünk csakúgy mint a p_i-kre, és a számok között megbúvó nagy betűkre).

Az etalon

A legegyszerűbb n állapotú véletlen struktúrájú dinamikus rendszert úgy kapjuk, hogy vesszük az

$$X_1, \ldots, X_n$$

1. táblázat. Két példa Boole NK modellre

	Kapcsolatok			Műveleti kód				Kapcsolatok			Műveleti kód		
i	1	2	3	g_i	p_i	r_i	i	1	2	3	g_i	p_i	r_i
1	54	10	41	128	0,00	1	1	17	56	51	64	0,00	1
2	59	6	7	A247	0,63	7	2	39	58	72	191	1,00	7
3	50	24	40	127	1,00	7	3	48	56	69	127	1,00	7
4	52	12	19	223	1,00	7	4	10	61	18	239	1,00	7
5	59	39	29	251	1,00	7	5	3	61	18	1	0,45	1
6	18	54	17	223	0,94	7	6	71	32	60	64	0,00	1
7	67	29	54	8	0,00	1	7	55	50	67	191	1,00	7
8	70	1	11	4	0,00	1	8	57	20	33	250	1,00	6
9	18	2	24	17	0,63	2	9	63	13	7	239	0,43	7
10	29	34	41	191	0,08	7	10	43	59	71	255	1,00	8
11	54	22	72	10	0,06	2	11	14	A20	68	64	0,06	1
12	18	65	66	254	1,00	7	12	28	38	31	128	0,00	1
13	B52	5	43	253	1,00	7	13	64	30	22	18	0,43	2
14	18	68	48	251	1,00	7	14	58	59	3	32	0,00	1
15	58	1	C12	33	0,00	2	15	4	26	24	191	1,00	7
16	36	19	58	222	0,00	6	16	70	B19	46	254	1,00	7
17	55	26	14	8	0,00	1	17	26	62	6	4	0,00	1
18	59	51	63	32	0,00	1	18	40	5	11	127	0,44	7
19	43	59	18	191	1,00	7	19	64	49	23	253	0,57	7
20	4	51	43	4	0,56	1	20	63	69	24	221	0,46	6
21	56	10	50	239	1,00	7	21	34	8	29	251	1,00	7
22	8	D15	68	254	1,00	7	22	60	23	27	16	0,00	1
23	25	41	48	16	0,00	1	23	46	5	C22	20	0,00	2
24	63	21	32	32	0,92	1	24	65	43	20	1	0,31	1
25	54	65	29	191	1,00	7	25	38	72	18	254	1,00	7
26	72	11	53	127	1,00	7	26	21	24	64	192	0,00	2
27	72	18	46	223	1,00	7	27	3	8	10	64	0,00	1
28	53	72	36	128	0,00	1	28	36	7	16	251	1,00	7
29	7	56	6	65	0,00	2	29	71	52	35	D2	0,00	1
30	5	32	7	191	1,00	7	30	9	66	37	191	1,00	7
31	61	14	17	0	0,00	0	31	46	12	E9	191	0,69	7
32	25	35	60	16	0,00	1	32	F30	65	50	239	1,00	7
33	53	57	40	223	1,00	7	33	57	28	14	24	0,00	2
34	61	70	38	191	0,01	7	34	23	6	62	16	0,00	1
35	57	17	24	18	0,00	2	35	64	45	58	247	1,00	7
36	24	28	59	255	1,00	8	36	26	17	33	32	0,00	1
37	71	5	8	1	0,00	1	37	8	52	16	127	1,00	7
38	E62	34	19	255	1,00	8	38	12	69	31	8	0,00	1
39	23	68	16	247	1,00	7	39	G66	60	29	1	0,00	1
40	33	3	27	239	1,00	7	40	33	43	35	8	0,00	1
41	65	71	20	223	1,00	7	41	42	40	13	2	0,00	1
42	5	26	72	4	0,00	1	42	52	11	55	4	0,96	1
43	3	42	19	127	1,00	7	43	5	10	30	127	1,00	7
44	1	9	7	119	0,56	6	44	2	51	60	247	0,69	7
45	23	29	52	223	1,00	7	45	9	63	50	255	1,00	8
46	59	51	58	191	0,83	7	46	22	35	31	64	0,00	1
47	26	13	53	247	1,00	7	47	11	17	61	16	0,00	1
48	21	60	61	3	0,60	2	48	20	39	72	223	1,00	7
49	71	38	64	127	1,00	7	49	69	56	3	191	1,00	7

1. táblázat. Két példa Boole NK modellre (folytatás)

	Kapcsolatok			Műveleti kód				Kapcsolatok			Műveleti kód		
i	1	2	3	g_i	p_i	r_i	i	1	2	3	g_i	p_i	r_i
50	42	70	23	185	1,00	5	50	47	43	3	4	0,00	1
51	72	2	25	111	0,37	6	51	56	29	64	2	0,00	1
52	13	60	42	128	0,00	1	52	57	45	43	253	1,00	7
53	15	12	54	239	0,94	7	53	59	37	42	16	0,00	1
54	50	16	51	247	0,44	7	54	56	13	58	H139	0,23	4
55	26	9	68	4	0,00	1	55	48	72	50	175	1,00	6
56	54	25	51	127	1,00	7	56	49	55	28	0	0,00	0
57	53	18	20	4	0,60	1	57	8	66	22	251	1,00	7
58	44	1	55	251	1,00	7	58	7	17	18	4	0,45	1
59	46	35	42	8	0,72	1	59	7	48	37	111	1,00	6
60	3	41	48	253	0,60	7	60	45	52	19	126	0,56	6
61	69	28	12	243	0,08	6	61	56	42	6	189	1,00	6
62	36	14	18	1	0,00	1	62	33	66	17	127	1,00	7
63	14	40	10	1	0,01	1	63	10	22	67	32	0,00	1
64	2	52	59	251	0,49	7	64	52	25	31	253	0,47	7
65	35	19	58	191	1,00	7	65	62	36	69	254	1,00	7
66	58	50	19	16	0,00	1	66	30	I38	37	127	1,00	7
67	F21	46	50	8	0,00	1	67	13	12	19	239	1,00	7
68	54	14	20	0	0,00	0	68	40	11	32	16	0,04	1
69	61	66	71	247	0,99	7	69	68	34	72	J239	1,00	7
70	36	31	50	72	0,00	2	70	42	65	K45	4	0,00	1
71	32	33	51	33	0,56	2	71	12	27	10	223	1,00	7
72	69	5	61	132	0,00	2	72	5	30	59	8	0,00	1

2. táblázat. A 191-es műveleti kód értelmezése:
a kettes számrendszerben 191 = 10111111

Bemenő jelek			Kimenő jel
1	2	3	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

független, a $V = (1, \ldots, n)$ értékeket egyenlő valószínűséggel felvevő valószínűségi változókat, és ezekkel definiáljuk az első n pozitív egész halmazán az

$$f(i) = X_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

véletlen függvényt. Legyen Y_0 az X_i-ktől független, velük megegyező eloszlású valószínűségi változó. Definiáljuk rekurzíven az $Y_t = f(Y_{t-1})$, $t = 1, 2, \ldots$ sorozatot. Mivel a V halmaz véges, Y_t értéke egyszer csak megegyezik a sorozat egy korábbi tagjával: $Y_t = Y_s$, ahol $s < t$. Ettől kezdve a sorozatban $h = t - s$ elemű ciklusok ismétlődnek: $Y_{j+h} = Y_j$, ha $j \geq s$ (ciklusok helyett néha attraktorokat mondunk). Jellemző a dinamikára ezeknek a ciklusoknak a száma, és a ciklusok elérési ideje. Mindkettő sztochasztikus mennyiség, az első nagy n-re közelítőleg $\log n$, a második $\sqrt{n}$. Kauffman Boole NK modelljeinek viszont egy varázslatosan szűk osztályára mindkettő $\sqrt{\log n}$.

Ezért gondolja ő azt, hogy a Boole NK modell jól modellezi az egyes sejteken belüli enzimek dinamikáját. Azt teszi fel, hogy minden egyes enzim két állapotban lehet: aktívban vagy inaktívban. Összesen d enzim van a sejtben, és ezek a Boole NK modell szerinti rendben aktivizálják egymást. Kauffman azt is felteszi, hogy a ciklusidő a sejt élettartama, ezt követi a sejt osztódása. Az osztódások során keletkező állapotváltozások miatt a sejtek differenciálódnak, mert különböző ciklusok vonzási tartományába kerülnek. Azok a sejtek lehetnek funkcionálisan azonosak, amelyek ugyanahhoz az attraktorhoz tartoznak. Az a szervezet életrevalóbb, amelyben a differenciálódás során kialakuló dinamikák együttese szerencsésebb.

Ha $k = d$, vagyis minden bit beleszól minden más bit életébe, és a műveleti kódok eloszása egyenletes, akkor könnyen láthatóan az etalont kapjuk, tehát a különböző ciklusok száma konst $*\, d$, hosszuk konst $*\, 2^{d/2}$. Egy ilyen rendszer nem igazán lehet életrevaló, hiszen kaotikusak a funkciói. Ha az egyes műveleti táblákon belül a g_i függvények értékét tisztán véletlenül, mindentől (a függvény argumentumától is) függetlenül választjuk meg, és az eloszlás erősen aszimmetrikus, mondjuk a 0 bit valószínűbb, akkor a rendszer élete során az i-ik bit gyakrabban lesz 0, mint 1, és a tapasztalat szerint az ilyen rendszerek állapota egy idő után már nem változik. Sőt, akárhonnan indítjuk a rendszert, a dinamika ugyanoda konvergál, az ilyen rendszereket konvergenseknek hívjuk. A kétféle viselkedés között helyezkednek el azok az átmeneti rendszerek, amelyekben néhány bit mozgékonysága megmarad. Valószínűleg matematikailag nem igaz amit mondunk, noha hihetően hangzik: ha csak $\log d$ bit marad mozgékony, akkor ezek állapota lesz a valódi állapottér, és érthető, hogy n szerepét d veszi át. Az 1. táblázatban bemutatott dinamikákban azok a bitek mozgékonyak, amelyekre p_i értéke 0 és 1 közé esik.

Ray állatkertje

Az élet célja tehát az életrevalóság optimalizálása. Tom Ray javasolta azt, hogy ne formálisan definiáljuk az életrevalóságot, hanem előbb csináljanak valamit az egyedek, és ennek alapján ítéljük meg, mennyire életrevalóak. Legyen például ε egy binárisan kódolt picike számítógépes program. Üzemeljenek a programok párhuzamosan, és enyhe mutációval szaporítsuk azokat, amelyek valamilyen értelemben hatékonyabbak.

Így előbb vagy utóbb nagy hatékonyságú programok keletkeznek (Ray ezt annyira komolyan gondolta, hogy igyekezett redukálni annak a lehetőségét, hogy dinamikájával valaki számítógépes vírusokat fejlesszen). Ide operáltuk mi be a gépi kódban megírt programok helyébe a Boole NK modellt. Tehát Ray állatkertjét benépesítettük Kauffman állataival. Egy hosszú tenyésztés során kaptuk az 1. táblázatban bemutatott modelleket: ezek 904 véletlen ősállat rivalizálásának a termékei. (Az állatok eloszlásának pontos leírását az „A mutáció valószínűsége" című fejezetben adjuk meg.)

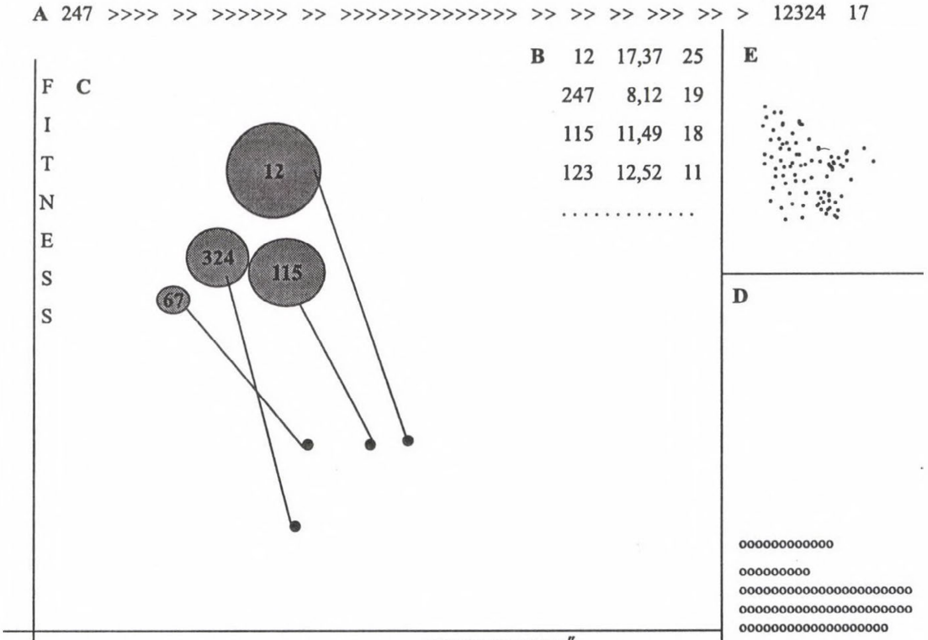
Mi ezt a lépést annyira természetesnek gondoljuk, hogy csak csodálkozni tudunk azon, eddig miért nem jutott senkinek eszébe. A számítógépeken belüli virtuális világ ma már valódi kísérleteket tesz lehetővé, így sok dologban újra ott tartunk, mint a régi görögök: már ki tudjuk lőni a nyilat, de nem értjük miért száll. Ray különböző gépeken tenyészti állatait, közben magát a tenyésztést is fejleszti alkalmazkodva a különböző gépies környezetekhez. Walter Fontana korábban hasonló kísérleteket végzett, de nála az egyedek kettesével kölcsönhatásba kerültek, az egyik program volt, a másik a bemenő adat (bármelyikük bármelyik lehetett), és az eredmény került valamelyik harmadik, korábban gyengén szereplő bit sorozat helyére. Ez a kísérlet nem az egyedeket fejlesztette, hanem a viszonyukat, a bevezetőben említett zárt rendszer létezését volt hivatott alátámasztani.

Ray rendszere zárt struktúrák viselkedését értékeli ki: a struktúráknak a rendszer csak a bemenő jelekre adott válaszait ismeri meg, és azt fejleszti, amelyiknek a reakciói megfelelőbbek. Kauffman Boole NK modelljeinek az esetében a struktúra adott: megválaszthatjuk a dimenziót, a kapcsolatok számát, magukat a kapcsolatokat, és a műveleti táblákat. A funkció a rendszer által definiált dinamika üzemeltetése. Mivel az állapottér teljes feltérképezése már aránylag kis méretek mellett is kivitelezhetetlen, a viselkedést csak statisztikusan figyelhetjük meg abban bízva, hogy ez kis mértékben függ a kezdő értéktől. De lehet, hogy tévedünk. Más összefüggésben Kauffman részletesen kifejti, hogy szerinte az evolúció mozgástere a konvergens és kaotikus viselkedési tartományok közötti határvonal. Ilyesmi előfordulhat a kezdő értékek világában is: megfelelő helyről indítva a rendszer egészen másként viselkedhet.

Mit várunk mi egyáltalán a kétféle világ házasságától? A Boole NK modellek struktúrája és funkciói közötti viszony jobb megértését. Nem gondolunk komolyan arra, hogy a rendszer üzemeltetése során szerzett tapasztalatok valódi evolúciós értelmezést is kaphatnak, bár elvileg ez lehetséges. De reálisabb célnak tartjuk azt, hogy a tenyésztés során kezünkbe kerülő egyedek közvetlen vizsgálata segíthet az egyedek motorjául szolgáló dinamika megértésében.

Szimulált multiprocesszorok. Az állatkert lakói tehát 72 bitű 3 kapcsolatú Kauffman-állatok. A való világban egymástól függetlenül élnek az egyes ketrecek lakói, nálunk véletlen rendben lehetőséget kapnak enzim dinamikájuk üzemeltetésére. Újra és újra tisztán véletlen alapon kiválasztunk egy ketrecet, és annak lakóját képzeletben az állatkert színpadára szólítjuk. Ott egyszerre 511 lépést végezhetnek, ennek során minden egyes ciklizálás után újabb véletlen kezdő pontból folytathatják az életüket. Meghatározzuk, hogy az egyes ciklusok között hány különböző van.

A tenyésztést végző program futása során egy sejt életének egyetlen lépése a képernyőn legfelül egy „>" jel (1. ábra A része). Az állat az élet során mint egy csiga hosszú színes csíkot húz maga után a képernyő tetején (ez a színpad). A ciklusok határán döccentünk egyet a „>" jelek folyamán, így az egyes ciklusok elkülönülnek. A jobb tájékozódás érdekében az egyes állatokhoz színeket rendelünk, kezdetben a lépés színe azonos az állat színével, aztán az újabb ciklusok színe igyekszik a lehetőségekhez képest különböző lenni. Erős egyszerűsítéssel azt mondhatjuk, a modellbeli élet célja az, hogy egyre színesebb egyéniségeket állítsunk elő. A ciklusok hossza (a bevezető szakasszal együtt) 4–20 körüli, számuk tíz és ötven között szokott változni. A kert pillanatnyi állapotát a vezető 9 család folyamatos feltüntetésével jellemezzük (1. ábra B része). Itt megadjuk a család sorszámát, a családban életben levő egyedek élete során produkált életrevalóság átlagát, és a családhoz tartozó egyedek számát. Az 511 lépésben meghatározzuk a különböző ciklusok számát, gyakoriságát és a ciklusok átlagos elérési idejét. Ez utóbbit arra használjuk, hogy az állatokat két dimenzióban megjelenítsük (1. ábra C része).



1. ábra. Tierra program képernyője
A – *Egy állat szereplése;* **B** – *Kilenc vezető állat;* **C** – *Az osztódások dinamikája;*
D – *Az életrevalóság fejlődése;* **E** – *Az állatkert madártávlati képe*

Új állatok

Az állatok véletlen sorrendben egymás után fellépnek az állatkert színpadán, és aki életrevalóbb az előtte szereplők közül a legkevésbé életrevalónál, az annak ketrecében elhelyezheti az enyhe mutációval lemásolt utódát. A ketrec korábbi lakója elpusztul, a szaporodó állat változatlan struktúrával életben marad (természetes gondolat lenne az is, hogy ez az állat is mutáljon). Minden egyes osztódás után az élet elölről indul az állatkertben. Az az állat, amelyik először lép egy osztódás után a színpadra, csakis áldozat lehet. Ha a következő állat életrevalósága nagyobb, az megöli. Ha kisebb, a helyére lép, és az első megmenekül. Ez a lefelé licitálás addig tart, amíg jön egy állat, amelyiknek az életrevalósága nagyobb a potenciális áldozat életrevalóságánál, az fog osztódni. (Vagy szaporodni, ezeket a fogalmakat kissé keverjük.) Egy ősállat utódait összetartozó családnak tekintjük (az 1. táblázatban az első példa a 688 számú családhoz, a második a 320-ashoz tartozik). A képernyő legnagyobb részét elfoglaló koordináta rendszerben (1. ábra C része) nagyobb számozott körlap mutatja a szaporodó állatot (a szám a család száma, a ketrecek számozását nem mutatjuk), és ezt a körlapot mint egy kis léggömböt az elfoglalt ketrec lakójának megfelelő gombóchoz csatoljuk. Tapasztalatunk szerint a szelekciós nyomás a kert lakóit balról jobb felé, és persze felfelé hajtja. Ezt a trendet mutatják a léggömbök madzagai, kicsit rendezetlenül.

Az első kérdés az, hogy igaz-e az, hogy előbb vagy utóbb mindig egy család marad életben. Eddig ezt tapasztaltuk, és ezt talán könnyen lehet bizonyítani. Teszteljük azt is, hogy meghatározza-e ezt a családot az állatkert induló összetétele. Amint azt később megmutatjuk, nem, de azért erős az eddig tapasztalt predesztináció.

A legmeglepőbb eredmény az, hogy eddigi tapasztalatunk szerint (tíz, közel 50 ezer lépésből álló futás, egy lépésen egy állat egyszeri színpadra lépését értve) az állatkert élete során látott éleletrevalóságok átlaga lényegében lineárisan nő. Ezt a hatást mutatják a képernyő jobb oldalán egymásra rétegződő pötty-sorok (1. ábra D része). Hosszú futás során ezek színezete fokozatosan változik annak függvényében, ahogyan redukálódik a családok száma, de a növekedés üteme változatlan. Misztikus. Az egyes pöttyök egy-egy osztódó állat életrevalóságát mutatják. 180 pötty fér el egy sorba, amikor a sor végére érünk, újra rajzoljuk az állatkertnek a jobb felső sarokban mutatott véletlen vetületét, ezen jól követhető a családok küzdelme (1. ábra E része). Formálisan egy állat struktúrája egy 72 sorból és 4 oszlopból álló mátrix (3 oszlop adja a kapcsolatokat, egy a függvény kódot). Induláskor generálunk két 72-szer 4-es véletlen mátrixot, az ezekkel képzett skaláris szorzatok adják itt az állatok koordinátáit.

A kritikus viselkedés. Kauffman nem mondja meg, szerinte mi a célfüggvény. Mi első nekifutásként erre a célra az 511 lépés során látott különböző körök számát használtuk. Indokolta ezt az, hogy az összes attraktor száma Kauffmannál a legfontosabb tényező, amivel ő az egyes fajok különböző szövettípusainak a számát reprezentálja, és nála a ciklusok hossza a sejtek osztódási idejének felel meg. A Boole NK modellek széles osztályában többen sejtenek egy kritikus tartományt, amelyben e két fontos tényező közelítőleg $\sqrt{d}$. Kauffman a jelenség mögött a „canalyzing Boolean functions" (tölcsérszerű Boole függvények) hatását képzeli. Bastolla–Parisi nem adnak explicite magyarázatot, de lényegében azt sejtetik, hogy a kritikus viselkedés általuk talált

$$\rho = 2p(1-p) = \frac{1}{k} \tag{3}$$

feltétele (ahol p annak a valószínüsége, hogy g_i egy adott helyen 1-gyel egyenlő) abból fakad, hogy (3) esetén a bitek világában egy változás átlagosan egy újabb változást von maga után. Ez az az osztály, amelyre azt sejtik, hogy a ciklusoknak a száma, és a ciklusok elérési ideje egyaránt $\sqrt{d}$. A kritikusság (3) alatti feltételére még visszatérünk. Ha $d = 72$, akkor a kritikus tartományban 8–9 körüli ciklusokat várhatunk.

Azt reméltük, hogy az állatkert fejlődése bizonyítja ezt a sejtést, sőt, ezen túlmenően azt is igazolja, hogy ez a tartomány maximalizálja a mi célfüggvényünket. De úgy tűnik, tévedtünk. Az eddig tapasztalt negatív eredmény két lehetséges irányt jelöl ki:

– keresni kell egy jobb célfüggvényt (életrevalóságot), ami lehetőleg a kritikus tartományra tereli a populációt, vagy

– ki kell deríteni, „merre tart" a mi célfüggvényünk mellett a populáció.

Két példa. Az 1. táblázatban bemutatott két példa egy tényésztés eredménye. Az első család végig az élen volt, a másodikban az ezredik lépésben keletkezett egy aránylag váratlan, sikeresnek mondható mutáció. Akkoriban már az első elhódította a ketrecek 90%-át. A második család mégis képes volt utolérni az elsőt, és azt várjuk, le is győzi azt. Az 1. táblázatban szereplő nagybetűk az induló állat adataira utalnak abban az esetben, ha ez eltért a végső értéktől.

Az első (688 sorszámú) állat esetében ezek értéke a következő: A = 32, B = 6, C = 32, D = 57, E = 71, F = 13, a második (320 sorszámú) állat esetében A = 24, B = 39, C = 62, D = 128, E = 16, F = 69, G = 52, H = 239, I = 46, J = 128, K = 3. Például a táblázat 13-ik sorában B52 azt jelenti, hogy a tenyésztés végén 52 lett a 13-ik bit első kapcsolata, ami eredetileg 6 volt.

Vizsgálgatván az első állatot, elkövettünk egy említésre méltó műhibát: a bitek sorszámát vettük első kapcsolati kódnak, emiatt minden oszlop eltolódott, végül a valódi harmadik kapcsolati kód lett a műveleti kód. A dolognak frenetikus hatása lett, a kapott állat attraktorainak a száma százezer lehet, de ezek elérési ideje ugyanolyan kicsi, mint a többi állat esetében. A legfurcsább az állat viselkedésében az, hogy egyáltalán nincsenek stabilizálódó bitjei. Ez a tévedés tehát olyan struktúrára vezetett, amely bizonyos értelemben az etalon fordítottja, egy olyan rendszer, amelyben a különböző ciklusok száma konst$*2^{d/2}$, és a hosszuk konst$*d$. Itt a tévedés miatt minden egyes koordináta önmagára is hat, ez valószínűleg fontos szerepet játszik ennek a furcsa viselkedésnek a kialakításában.

Úgy érezzük mintha aláaknázott talajon járnánk, egy ártatlannak tűnő tévedés egészen új jelenséget produkál. Általában is az a tapasztalatunk, hogy még nagyon keveset tudunk az NK modellek esetében a struktúra és az attraktor-rendszer kapcsolatáról. Ez a példa is jól mutatja azt, hogy ebben szerepe lehet a kapcsolatok rendszerének. Kauffman a stabilizálódó biteket „befagyóknak" mondja (az 1. táblázatban ezek p_i-je vagy 0 vagy 1), ezek kialakulásában szerepe lehet a kapcsolatok és a műveleti táblák harmonizálódásának. Természetes gondolat lenne kioperálni a modellből ezeket a biteket, végül is a ciklusok a mozgékonyságukat megőrző bitekből állnak össze. De hogyan lehet olyan rendszereket generálni, amelyekben eleve nincs befagyó? Az imént említett műhiba persze tálcán kínálja az ötletet: tegyünk beléjük a bitekre visszamutató kapcsolatokat. Kérdés az, van-e más lehetőség.

Fejlesztések. Nincs áttekintésünk a fejlesztési lehetőségekről. Etalonból n^n van, most $n = 2^d$, $d = 72$. A Boole NK modellek száma

$$\binom{d}{k}^d * 2^{2^k * d},$$

és (3) ezeket is erősen redukálja. Egy ideig még nem fogjuk tudni, mi az emberben az enzimek valódi kölcsönhatása (noha 1999. december 4-én közölték a 22-ik kromoszóma teljes szekvenciáját) de elképzelhető, hogy a kritikus tartománytól kicsit kell a kaotikus felé menni, és ott még újabb struktúrák bukkanhatnak fel.

Egy evolúciós modell nem tartalmazhat minden részletet. Mégis vannak mozzanatok, amik fontosak lehetnek. Ezek egyike a közös táptalaj, ezt aránylag könnyen be lehetne építeni a modellbe.

Az új életrevalóság

Jelöljük az 511 lépés során keletkező különböző ciklusok számát κ-val (ez volt az első célfüggvény), hosszukat és gyakoriságukat rendre $(h_1, \ldots, h_\kappa)$-val, illetve $(s_1, \ldots, s_\kappa)$-val. Az új életrevalóság első alakja

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\kappa} h_i \ln(s_i),$$

volt, de ez nem vált be, mert hatására elszaporodtak azok az állatok, akiknek egyetlen hosszú ciklusuk volt. Most azzal kísérletezünk, hogy megtaláljuk a kissé általánosabb

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\kappa} h_i^{\beta} \ln(s_i),$$

formulában a használható kitevőt, talán $\beta = 0{,}5$ a jó választás. A 3. táblázatban két párhuzamos fejlesztés eredményeit mutatjuk be az új célfüggvény mellett (ezekben $\beta = 0{,}5$). Mint látható, a második tenyésztés során a 752-es család hajszál híján kipusztult, aztán mégis ez a család lett a győztes. Ez a család az első tenyésztésben valóban kipusztult, ahogyan azok a családok is elég hamar kipusztultak a második tenyésztés során, amelyek először jól szerepeltek. C'est la vie!

A 3. táblázatban először azokat a családokat mutatjuk be, amelyek a két tenyésztés során az egyikben legalább 50 tagúak voltak, majd azokat, amelyek egy újabb tenyésztésben legalább 30 tagúak voltak (amint látható, az 1. táblázatban szereplő 320-as és 688-as család nincs ezek között, ami a célfüggvény módosítása miatt is lehet). Az első oszlopban megadjuk a lépésszámokat, ezek kezdetben kicsit rendetlenek, mert nem készítettük elő átgondoltan a tenyésztést. A 4. táblázatban megadjuk az életrevalóságok megfelelő értékeit. Ezekből az látható, hogy a tenyésztés során általában mindegyik család életrevalósága fejlődött.

3. táblázat. Néhány család elemszáma (első tenyészet)

	Családok sorszáma													
Lépés	105	119	279	283	300	338	409	468	517	633	637	738	752	804
2318	2	2	6	1	12	2	7	0	11	10	7	3	2	8
4634	4	10	14	2	41	2	21	0	27	40	22	6	0	17
6952	7	32	8	3	67	11	50	0	26	92	53	5	0	20
9222	17	57	9	3	81	34	90	0	14	137	82	2	0	13
11570	23	68	2	1	49	63	163	0	4	175	86	2	0	7
14202	28	65	1	0	24	66	242	0	0	215	61	0	0	2
16514	26	51	2	0	25	58	272	0	0	276	28	0	0	0
18863	16	50	1	0	11	42	275	0	0	402	15	0	0	0
21202	6	48	θ	0	7	17	232	0	0	507	6	0	0	0
23528	1	21	0	0	3	14	169	0	0	658	0	0	0	0
25910	0	21	0	0	4	7	120	0	0	730	0	0	0	0
28204	0	31	0	0	0	3	74	0	0	790	0	0	0	0
30501	0	26	0	0	0	0	22	0	0	851	0	0	0	0
37275	0	4	0	0	0	0	0	0	0	900	0	0	0	0
39601	0	2	0	0	0	0	0	0	0	902	0	0	0	0
41897	0	3	0	0	0	0	0	0	0	901	0	0	0	0
44182	0	6	0	0	0	0	0	0	0	898	0	0	0	0
46498	0	5	0	0	0	0	0	0	0	899	0	0	0	0
48776	0	3	0	0	0	0	0	0	0	901	0	0	0	0
52597	0	4	0	0	0	0	0	0	0	900	0	0	0	0

Ez csak azért van így, mert mi a sikeres családokat választottuk. Vannak határozottan fejlődésképtelen családok is. Bizonyos mértékű konvergencia is megfigyel-

3. táblázat. Néhány család elemszáma (második tenyészet)

	Családok sorszáma													
Lépés	105	119	279	283	300	338	409	468	517	633	637	738	752	804
2331	5	6	4	9	1	2	4	6	14	1	2	9	5	15
8222	61	88	14	70	0	4	31	85	69	5	10	5	10	85
10521	119	97	13	104	0	8	20	85	114	0	14	8	4	102
12868	183	69	26	139	0	11	6	45	158	0	10	4	2	113
15179	231	42	41	179	0	14	0	17	155	0	3	5	1	123
19832	230	51	56	198	0	19	0	6	130	0	0	4	6	126
22177	198	95	67	172	0	22	0	3	145	0	0	10	13	107
24516	148	145	97	133	0	17	0	0	187	0	0	19	21	66
26841	99	208	98	71	0	11	0	0	253	0	0	33	36	41
29199	52	238	108	34	0	5	0	0	293	0	0	58	55	13
32409	15	259	48	9	0	3	0	0	350	0	0	60	128	4
34713	7	221	31	3	0	0	0	0	383	0	0	70	168	2
37040	2	195	14	0	0	0	0	0	374	0	0	88	219	0
39336	2	170	7	0	0	0	0	0	358	0	0	77	288	0
41629	0	153	2	0	0	0	0	0	344	0	0	45	357	0
43951	0	147	0	0	0	0	0	0	259	0	0	35	460	0
46272	0	108	0	0	0	0	0	0	230	0	0	37	528	0
48970	0	84	0	0	0	0	0	0	148	0	0	17	655	0
51246	0	65	0	0	0	0	0	0	91	0	0	9	739	0

3. táblázat. Néhány család elemszáma (harmadik tenyészet)

	Családok sorszáma															
Lépés	22	70	105	107	154	172	283	365	389	447	584	632	669	694	698	699
10000	8	22	9	7	24	51	57	26	24	9	9	13	9	23	23	35
20000	10	8	35	9	33	74	80	41	63	18	12	34	31	72	69	16
30000	21	18	18	30	39	100	145	26	92	31	14	19	13	103	31	17
40000	62	45	15	56	17	77	160	21	130	11	35	15	14	67	23	19
50000	75	49	6	47	10	91	158	10	177	4	69	7	22	51	10	19
60000	108	32	1	51	1	79	126	9	254	2	56	4	25	69	1	15
70000	122	14	0	73	0	66	78	4	336	1	58	0	9	106	0	8
80000	84	0	0	90	0	66	67	3	393	0	62	0	5	104	0	1

hető az élmezőnyben: egyformává válnak a családok életrevalóságai. Legalábbis a tenyésztés középső szakaszában. Aztán valahogy a látszólag kicsiny eltérések arra vezetnek, hogy az egyik család átveszi a hatalmat. (Táblázatunkban csak a színpadon tapasztalt életrevalóságok értékeit adjuk meg, kis családoknál előfordul, hogy egyik pillanatban még van eleven taguk, de azok egyike sem volt még színpadon, ezért az adott pillanatban a családnak nincs átlagos életrevalósága, de később újra lesz.)

Az első célfüggvény értéke meglepően magasra felment: az 1. táblázat két állatának nagyon sok attraktora van, és nem látszik a javulás megakadni azon a ponton, ahol a tenyésztést abbahagytuk. A módosított célfüggvény ebből a szempontból jobban viselkedik, értéke 40 körül stabilizálódik.

4. táblázat. Néhány család életrevalósága (első tenyészet)

	Családok sorszáma													
Lépés	105	119	279	283	300	338	409	468	517	633	637	738	752	804
2318	30	28	21	-	24	29	28	-	22	24	20	19	18	22
4634	29	26	21	24	25	29	27	-	21	25	23	19	-	23
6952	29	27	21	23	25	29	28	-	21	25	24	19	-	23
9222	29	27	21	24	26	29	29	-	21	27	26	22	-	25
11570	30	28	28	-	27	29	30	-	21	29	27	22	-	23
14202	30	28	31	-	29	30	31	-	-	31	28	-	-	26
16514	30	31	29	-	30	30	31	-	-	32	28	-	-	-
18863	30	32	-	-	31	31	32	-	-	33	28	-	-	-
21202	31	33	-	-	31	32	32	-	-	34	29	-	-	-
23528	-	32	-	-	31	32	33	-	-	35	-	-	-	-
25910	-	34	-	-	31	31	33	-	-	35	-	-	-	-
28204	-	34	-	-	-	33	34	-	-	36	-	-	-	-
30501	-	34	-	-	-	-	35	-	-	36	-	-	-	-
37275	-	35	-	-	-	-	-	-	-	37	-	-	-	-
39601	-	36	-	-	-	-	-	-	-	38	-	-	-	-
41897	-	-	-	-	-	-	-	-	-	38	-	-	-	-
44182	-	35	-	-	-	-	-	-	-	38	-	-	-	-
46498	-	36	-	-	-	-	-	-	-	39	-	-	-	-
48776	-	37	-	-	-	-	-	-	-	39	-	-	-	-
52597	-	38	-	-	-	-	-	-	-	39	-	-	-	-

4. táblázat. Néhány család életrevalósága (második tenyészet)

	Családok sorszáma													
Lépés	105	119	279	283	300	338	409	468	517	633	637	738	752	804
2331	30	28	21	27	11	28	24	19	25	-	27	17	17	26
8222	29	27	26	27	-	27	24	25	27	24	25	21	23	27
10521	30	27	30	28	-	28	24	25	28	-	26	27	24	28
12868	30	28	31	29	-	29	25	26	29	-	27	27	32	29
15179	30	29	31	30	-	30	-	28	30	-	26	28	32	30
19832	31	34	32	31	-	31	-	31	32	-	-	34	35	31
22177	31	34	33	31	-	31	-	28	33	-	-	34	34	32
24516	32	34	33	31	-	32	-	-	34	-	-	34	34	32
26841	32	35	33	32	-	32	-	-	34	-	-	35	35	32
29199	33	35	34	32	-	32	-	-	35	-	-	35	36	32
32409	34	36	34	31	-	31	-	-	36	-	-	35	37	33
34713	33	36	35	32	-	-	-	-	36	-	-	36	37	32
37040	-	36	36	-	-	-	-	-	36	-	-	36	37	-
39336	31	37	36	-	-	-	-	-	37	-	-	36	38	-
41629	-	37	37	-	-	-	-	-	37	-	-	37	38	-
43951	-	38	-	-	-	-	-	-	37	-	-	37	38	-
46272	-	38	-	-	-	-	-	-	37	-	-	37	38	-
48970	-	38	-	-	-	-	-	-	37	-	-	37	39	-
51246	-	38	-	-	-	-	-	-	38	-	-	37	39	-

4. táblázat. Néhány család életrevalósága (harmadik tenyészet)

	Családok sorszáma															
Lépés	22	70	105	107	154	172	283	365	389	447	584	632	669	694	698	699
10000	25	20	28	17	24	20	23	21	21	21	21	22	23	22	21	22
20000	32	23	28	30	28	24	26	24	26	26	26	23	25	25	24	28
30000	33	28	29	31	25	26	27	25	29	28	31	25	28	27	26	30
40000	32	29	29	30	28	29	29	27	30	30	32	28	30	30	28	30
50000	32	30	29	31	30	30	30	29	30	33	31	31	32	31	23	31
60000	32	30	28	32	31	32	31	31	31	31	32	21	32	32	32	29
70000	32	29	–	33	–	33	32	31	33	30	32	–	33	32	–	33
80000	33	–	–	33	–	33	32	33	34	–	32	–	33	34	–	33

A mutáció valószínűsége

Kezdetben a mutáció valószínűségét 0,01-nek vettük, ami azt jelenti, hogy a szaporodás során minden egyes átmásolt szám esetében ekkora valószínűséggel követ el a rendszer másolási hibát, ilyenkor az új érték ugyanabból a generáló rendszerből jön, amivel az állatokat állítjuk elő. A kapcsolatok megválasztásánál minden egyes $\nu(i,j)$ értéke $1/d$ valószínűséggel lehet 1 és d között bármi, de ha $j > 1$ akkor ellenőrizzük, hogy ez nem egyenlő-e a $\big(\nu(i,s),\ s = 1,\dots,j-1\big)$ számok valamelyikével. Ha igen, újra randomizáljuk az illető számot. A műveleti kódot mi eleve kissé másként generáljuk, mint Parisi. Nálunk

$$P\big(g_i(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k) = (\eta_1,\dots,\eta_q)\big) = \text{konst} * \exp\Big(-\alpha \min\big(|\eta - qp|, |\eta - q(1-p)|\big)\Big),$$

ahol $\eta = \sum_{j=1}^{q} \eta_j$, $q = 2^k$, p a kritikus valószínűség, és $\alpha = 3$. A mutáció során is így állítjuk elő az új műveleti kódot. (Ezzel a választással „élesebb" eloszlásokat kapunk, mint ami a kritikus valószínűségű független, egyforma eloszlású sorsolásból adódik. Ez a választás az oka annak, hogy az 1. táblázatban a műveleti kódok eloszlása szemmel láthatóan nem egyenletes.) Azért választjuk ezt az eloszlást, mert ez szabályozza a triviálisan befagyó bitek számát: a tiszta, mindentől független p valószínűségű bitsor esetén aránylag sok olyan tábla adódik, amelyikben vagy mind a 8 bit 0, vagy mind 1, egy ilyen tábla hatására persze az érintett bit is mindig 0 illetve 1 lesz, elősegítve további bitek befagyását.

A mutáció fenti értéke mellett azt tapasztaltuk, hogy nem szóródnak szét az egyes családok tagjai, ami eleve indokolja azt, hogy általában 50000 lépésben egyetlen család marad. Ezért emeltük a mutáció valószínűségét 0,05-re. Azt tapasztaljuk, hogy ez már megfelelően szétszórja a családokat, ezt használtuk a 3.–4. táblázatokban bemutatott tenyésztésekben.

A méretek

Senki se tudja, mi történik, ha fix k mellett d tart a végtelenbe. Kritikus jelenség elvileg csak határesetben lehet, de vannak figyelmeztető jelek, amelyek arra utalnak, az eddigi tapasztalatok erősen méret-függőek. A valóságban persze d véges, nagyságrendileg százezer. Ma még ez a méret is elérhetetlen, legalábbis egy egész állatkertben. A ketrecek száma ugyancsak lényegesen nagyobb annál, mint ami realizálható. Jogos a kérdés, használhatóak-e egyáltalán akkor a kapott eredmények. Bastolla és Parisi analógiákkal dolgoznak. A sztochasztikus struktúrájú, de determinisztikusan működő rendszerek vizsgálatához sztochasztikus modelleket használnak. Eredményeik meggyőzően bizonyítják, hogy a kétféle randomizálás felcserélése statisztikusan elfogadható: sok sztochasztikusan generált rendszer átlagos viselkedése megegyezik a sztochasztikus rendszer átlagos viselkedésével. Eddigi tenyésztéseink eredményei viszont megerősítik azt az elképzelésünket, hogy ebben a szövegkörnyezetben nem mindig elhanyagolhatóak a kivételek. Lehet, hogy a 72 kicsi, vagy rosszul választjuk meg a célfüggvényt, de nálunk az evolúció során az állatok struktúrája határozott változást mutat. A Tierra rendszer eddig a mi célfüggvényünket 45-ig vitte fel, ott azért a növekedés már gyakorlatilag megáll. Más módszerekkel tudunk 70–80 körüli célfüggvényeket is elérni. Nem tudjuk, mi a valódi maximum, de azt Kauffman is többször mondja, hogy tulajdonképpen az evolúció nem igazán effektív algoritmus, akármi is a célja valójában.

A változások irányított gráfja

Legyen $S_0 \in U$ egy m_0 elemű részhalmaza az állapottérnek. Alkalmazzuk S_0 minden egyes elemére a rendszer dinamikáját, és jelöljük S_1-gyel a kapott pontok halmazát, m_1-gyel S_1 elemeinek a számát. Ekkor $m_1 \leq m_0$, mert a dinamika különböző pontokhoz rendelhet azonos pontokat. Legyen általában

$$S_t = \{\varepsilon \in U \,:\, \exists \varepsilon' \in S_{t-1},\ f(\varepsilon') = \varepsilon\}, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

és legyen m_t az S_t halmaz elemeinek a száma. Ha m_0 nagy, m_t kezdetben rohamosan csökken, de aztán stabilizálódik, mert az individuális pályák elérik az attraktorokat. Az általunk vizsgált méretek mellett már 10 lépés elegendő általában az attraktorok eléréséhez.

Ha U két elemében az i-ik koordináta különböző, ez a konkrét eltérés a két elem képében azokban a koordinátákban jelentkezhet, amelyeknek van i-vel egyenlő kapcsolat kódjuk. Ezek száma k körül ingadozik. Az i-ik koordinátában kezdetben meglevő eltérés akkor terjed tovább, ha a megfelelő műveleti táblák érintett soraiban található függvényértékek különbözőek, aminek a (3) alatti

$$\rho = 2p(1 - p)$$

a valószínűsége. Mondhatjuk tehát, hogy egy adott eltérésnek k-szor lehet ρ valószínűséggel a hatása újabb eltérés a dinamika által adott képben. Ha $k\rho = 1$, akkor az eltérések száma első ránézésre állandónak lenne vélhető, jobban végiggondolva a dolgot azonban látható, hogy az elvesztett (megszűnő) eltérések már nem keletkeznek újra: ha a dinamika két különböző pontot azonos pontba visz, azok a továbbiak során azonosak maradnak.

Befagyások. Ha $k = 2$, akkor a kritikus valószínűség 1/2, emiatt nincs kaotikus régió. Nagyobb k-ra a kritikus valószínűségek értékei szimmetrikusak 1/2-re, és nagy k-ra a kisebbik csak kicsit nagyobb $1/(2k)$-nál. Emiatt a műveleti táblák vagy a 0 vagy az 1 értéket preferálják. Az 1. táblázatban az r_i című oszlopban megadtuk az egyes műveleti táblákban az eggyel egyenlő függvényértékek számát, ez többnyire 1 vagy 7 (a 2. táblázatban bemutatott 191 kódú műveleti táblára ez a szám 7). Ha ez a szám 0, akkor a megfelelő koordináta az első lépéstől kezdve 0 lesz, ha ez a szám 8, akkor a bit értéke állandóan 1. Még ha ez a szám 2 vagy 6 is, akkor is mondhatjuk azt, hogy a tábla inkább a 0, illetve 1 értéket támogatja. A ritkább kód kialakulásához a vele kapcsolatban álló bitek megfelelő konstellációja kell: ha a szükséges bit-hármasban van ritka, akkor az érintett koordináta várhatóan befagy a gyakoribb biten.

Van fordított eset is, az 1. táblázat első állatában a 16-ik koordináta a ritkább biten fagy be. Nem jelentené az általánosság megszorítását, ha úgy forgatnánk át a műveleti táblákat, hogy mindig 1 legyen a ritkább bit, ebben az esetben a befagyó koordináták többsége 0 értékű lenne. Kezdetben azt hittük, hogy a változásokból kör formálódik, és az érintett koordinátákon ciklikusan vándorol egy konfiguráció. Ez csak ritkán van így (a kiemelt családok közül például a 409-es családban). Az etalonban kialakuló ciklusokat képzelhetjük hatosoknak: ahogyan ezt a számot leírjuk, egy kört rajzolunk egy bevezető útvonallal: a bevezető útvonal még nem tartozik a ciklushoz, ez olyan, mint egy hatos szára. A hatosban levő kör a ciklus.

A dinamika üzemeltetése során, amikor a kör kialakulása után új kezdő pontot választunk, sokszor előfordul, hogy a keletkező hatosok köre közös, de száraik vagy teljesen különböznek egymástól, vagy mint a patakok egy tó vízgyűjtőjében, csatlakoznak egymáshoz. A Boole NK modellekre ez a kép ismétlődik, de állapotok helyett koordinátákkal, és a patakocskák visszafelé folynak: a körben vándorló változások olyan koordinátákat is mozgatnak, amelyek önmaguktól nem lennének képesek állandó változásra. De általában a kép bonyolultabb: belső csatlakozások alakulnak ki a körökön belül, alternatív mechanizmusok, amelyek a mutációk során valóban hol eltűnnek, hol újra generálódnak. Arra is lehet példát találni, amikor van nem befagyó, de a ciklusokban nem változó koordináta.

A folytonos idő

Jogos az a kritika, hogy hindu bölcsek ellenére az enzimek dinamikája kicsit folyamatosabb lehet annál, amit a Boole NK modell kifejezni képes. Ha csak az enzimek arányát akarjuk leírni, gondolhatunk arra, hogy egy d dimenziós F függvény koordinátái az egyes enzimek koncentrációját írják le, mondjuk 0 és 1 között folytonosan. A dinamika pedig valamilyen differenciálegyenlet. Nem kerülünk messze a diszkrét modelltől, ha annak értékeit használjuk sarokpontonként:

$$F' = \mathcal{L}(F|f),$$

ahol $\mathcal{L}(x|f)$ a d dimenziós egységkocka csúcsaiban adott f függvény interpoláltja. Ennek i-ik koordinátája

$$\mathcal{L}_i(x|f) = \sum_{\eta \in U} \prod_{j=1}^{d} x_j^{\eta_j} (1 - x_j)^{1-\eta_j} f_i(\eta).$$

A diszkrét állapotú, diszkrét időben lépegető dinamika esetében a diszkrétség biztosítja a ciklikusságot. Ez most nincs. Ezért jogos a kérdés, változatlan marad-e a rendszer habitusa. Ki kell próbálni. Elvileg nem kizárható a dolog konzervatív viselkedése: „befagyás" a folytonos időben is lehetséges, bizonyos enzimek telítődhetnek, vagy elfogyhatnak.

Hivatkozások

[1] U. Bastolla and G. Parisi, Relevant elements, magnetization and dynamical properties in Kauffman networks: a numerical study, *Physica D.* (1996).

[2] U. Bastolla and G. Parisi, Closing probabilies in the Kauffman model: an annealed computation, *Physica D.*, **98** (1996), 1–36.

[3] U. Bastolla and G. Parisi, The critical line of Kauffman networks, *J. theor. Biol.*, **186** (1996).

[4] U. Bastolla and G. Parisi, A numerical study of the critical line of Kauffman networks, *J. theor. Biol.*, **187** (1997), 117–133.

[5] U. Bastolla and G. Parisi, Attractors in fully asymmetric neural networks, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30** (1997), 5613-5631.

[6] U. Bastolla and G. Parisi, The modular structure of Kauffman networks, *J. Phys. D.*, **115** (1998), 219–233.

[7] A. Bovier and V. Gayrard, An almost sure large deviation principle for the Hopfield model, *The Annals of Probability,* **24/3** (1996), 1444–1475.

[8] R. Cerf, The dynamics of mutation-selection algorithms with large population sizes, *Ann. Inst. Henri Poincarè,* **32** (1996), 455–508.

[9] R. Cerf, A new genetic algorithm, *The Annals of Applied Probability,* **6/3** (1996), 778–817.

[10] R. Cerf, Asymptotic convergence of genetic algorithms, *Adv. Appl. Prob.,* **30** (1998), 521–550.

[11] B. Cheng and D. M. Titterington, Neural networks: a review from a statistical perspective, *Statistical Science,* **9** (1994), 2–54.

[12] F. Comets and J. Neveu, The Sherrington–Kirpatrick model of spin glasses and stochastic calculus: the high temperature case, *Commun. Math. Phys.,* **166** (1995), 549–564.

[13] C. Darwin, *On the origin of species by means of normal selection or the preservation of favored races in the struggle of life,* Murray (London, 1859).

[14] P. Diaconis and D. Strook, Geometric bounds for eigenvalues of Markov chains, *The Annals of Applied Probability,* **1/1** (1991), 36–61.

[15] M. Eigen and P. Schuster, *The hypercycle, a principal of natural self-organization,* Springer, New York (1979).

[16] M. Eigen és R. Winkler, *A játék,* Gondolat (1981).

[17] P. Erdős and A. Rényi, On the evolution of random graphs, *MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei,* **5** (1960), 17–61.

[18] R. A. Fisher, *The genetical theory of natural selection,* Clarendon Press, Oxford 1930, 2nd Edition, Dover, New York (1958).

[19] H. Flyvbjerg, An order parameter for networks of automata, *J. Phys. A: Math. Gen.,* **21** (1988), L955–L960.

[20] W. Fontana, Algorithmic chemistry, In: *Artificial Life II, A proceedings volume in the Santa Fe Institute studies in sciences of complexity,* Ed. C.G. Langton, J.D. Farmer, S. Rasmussen, C. Taylor, vol. 10, Addison-Wesley, Reading (1992).

[21] S. Forrest, Genetic algoritms: principles of natural selection applied to computation, *Science,* **261** (1993), 872–878.

[22] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell, *Random perturbations of dynamical systems,* Springer, New York (1984).

[23] D. E. Goldberg, *Genetic algoritms in search, optimization and machine learning,* Addison-Wesley, Reading (1989).

[24] S. A. Kauffman, Metabolic stability and epigenesis in random constructed genetic nets, *J. theor. Biol.,* **22** (1969), 437–467.

[25] S. A. Kauffman, *The origins of order, Self-organization and selection in evolution,* Oxford University Press, New York (1993).

[26] S. A. Kauffman, *At home in the universe. The search for the laws of self-organization and complexity,* Oxford University Press, New York (1995).

[27] H. Kesten, Quadratic transformations: a model for population growth, *Adv. Appl. Prob.,* **2** (1970), 1–82, 179–228.

[28] J. Komlós, L. Rejtő and G. Tusnády, Learning with finite memory, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica,* **28** (1993), 167–172.

[29] Lovász László és Gács Péter, *Algoritmusok,* Műszaki Könyvkiadó (1978).

[30] J. Maynard Smith and E. Szathmáry, *The major transitions in evolution,* W. H. Freeman/Spektrum (Oxford, 1995),

[31] J. Mendel, Versuche über Pflanzen-hybriden, *Verh. Natur. Vereins Brün,* **4** (1866), 3–57.

[32] M. Möhle, A convergence theorem for Markov chains arising in population genetics and the coalescent with selfing, *Adv. Appl. Prob.,* **30** (1998), 393–512.

[33] M. Möhle, Coalescent results for two-sex population models, *Adv. Appl. Prob.,* **30** (1998), 513–520.

[34] T. Nagylaki, *Theoretical population genetics,* Springer, Berlin (1992).

[35] T. S. Ray, An approach to the synthesis of life, in: *Artificial life II,* (Ed. C. G. Langton), Addison-Wesley, Reading (1992), pp. 371–408.

[36] T. S. Ray, Evolution, complexity, entropy and artificial reality, *Physica D,* **75** (1994), 239–263.

[37] L. Rejtő and G. Tusnády, *Evolution of Boolean NK-Models in Tierra environment,* Limit Theorems in Probability and Statistics, J. Bolyai Society Mathematical Studies (1999).

[38] G. Rowe, *Theoretical models in biology,* Clarendon Press, Oxford (1994).

[39] E. Schrödinger, *What is life? The physical aspect of the living cell,* Cambridge University Press, Cambridge (1944).

[40] E. Szathmáry and J. Maynard Smith, From replicators to reproducers: the first major transitions leading to life, *J. theor. Biol.,* **187** (1997), 555–571.

[41] T. Tada, The immune system as a supersystem, *Annu. Rev. Immunol.,* **15** (1997), 1–13.

[42] A. Trouvè, Rough large deviation estimates for the optimal convergence speed exponent of generalized simulated annealing algorithms, *Ann. Inst. Henri Poincarè,* **32** (1996), 299–348.

Rejtő Lídia és Tusnády Gábor

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
Budapest

Lídia Rejtő and Gábor Tusnády: Tierra

A random dynamic called "Boolean NK–model" is introduced using the concepts of the book of S. A. Kauffman entitled The origins of order (Ch. 5. pp. 188–209, see also papers of U. Bastolla–G. Parisi). Introducing a fitness function for NK–models we modify T. Ray's Tierra model (see Kauffman's book pp. 276–277, papers of T. Ray, and G. Rowe's book), that is the Boolean NK–model is embedded into the Tierra environment. In our process individual dynamics are competing each-other to optimize the fitness function. We describe computer experiences with an implementation of the model and discuss open questions in the critical regime. We deal with theoretical aspects of the $N = K$ chaotic regime in more detailed form.

TÁRSULATI HÍREK

1. Az 1996. évi nagyrendezvényekről

a) Rátz László Vándorgyűlés (Sopron, július 2–5., résztvevők száma: 505 fő (ebből 25 fő határainkon túlról érkezett)

A július 2-i plenáris ülést Katona Gyula, a Társulat főtitkára nyitotta meg. A Beke Manó Emlékdíjakat Surányi János, a Társulat tiszteletbeli elnöke adta át. A plenáris ülésen hangzott el Lampérth Gyula megemlékezése Rátz Lászlóról, a soproni tanárról. (A megemlékezés szövegét később a vándorgyűlés résztvevői poszteren is olvashatták.) Sikert aratott Katona Gyula „Vegyünk ki sok részhalmazt úgy ..." c. előadása. A vándorgyűlés július 3–5 között szekcióüléseken folytatta munkáját. A szerkezetváltás és az általános érdeklődés változása miatt is egyre nehezebb a szekciók munkáját elkülönítetten kezelni. A résztvevők oldaláról nagy az igény a szekcióktól független témafeldolgozásra is. A vándorgyűlésen a NAT bevezetését elősegítendő két téma elméleti megközelítését, ill. korosztályonkénti megtárgyalását igyekeztünk elősegíteni: A helyi tantervekről és a gimnáziumi felvételi vizsgákról rendeztünk ankétokat. Különösen jól sikerült és figyelemfelkeltő volt M. Nádasi Mária „Hogyan készítsünk tantervet" c. plenáris előadása. A téma további feldolgozásában kiemelhető volt az 5–6. osztályosok, ill. az érettségit adó alapozó évfolyamok tanterveinek bemutatása. A felvételi vizsgák problémáinak felvetése hasznosnak bizonyult (hat iskola bocsátotta rendelkezésre a felvételik anyagát, ezeket elemezte előzetesen Szendrei Júlia és Tóth László), de tudni kell, hogy a problémák megoldása és kiküszöbölése nem lehet egyetlen vitadélután feladata.

Az alsó tagozatos szekcióban kiemelkedő volt C. Neményi Eszter játékokat bemutató foglalkozása, Szeredi Éva és Kovács Csongorné szemléletformáló „Alsós munka felsős szemmel" c. előadása. A hallgatóság jónak tartotta a szekcióban az előadások egymásra épülését. A felsőtagozatos szekcióban méltán aratott nagy sikert Hubert Tibor „Gondolatok, ötletek a számítástechnikáról" c. előadása, és mindhárom feladatmegoldó szeminárium (Kosztolányi József, Vincze István, Róka Sándor). Nagy érdeklődés kísérte Ferdinando Arzarello régi geometriai gépeket bemutató foglalkozását. Vancsó Ödön előadásának egy részét átengedte Vörösházy Enikő frissen diplomázó volt tanítványának, aki a szakdolgozatának egy részét ismertette.

A középiskolai szekció előadásai közül kiemelkedett Temesvári Ágota „A diszkrét geometria elemei az oktatásban" c. bemutatója, Pintér Ferenc, Nagy Gyula, Szakál Péter, Németh László szemináriumi és Horváth Róbert–Szalay László „A rekurzió" c. előadása. Érdekes volt a „Vektorok tanítása határokon innen és túl" c. összeállítás, mert megismerhette a hallgatóság, hogy a téma feldolgozásának milyen problémái vannak és voltak Felvidéken, Erdélyben és idehaza (Közreműködtek: Oláh György, Hajnal Imre és Dezső Gábor).

A vándorgyűlést színesítették még a Felsőoktatási Ankét és az Informatikai Bizottság rendezvényei is.

A szekcióüléseket jól egészítették ki a szemléltető eszközöket is bemutató kiállítások és könyvárusítások (Nemzeti Tankönyvkiadó, CALIBRA, TypoTeX). Informált egy-két poszter is készülő tankönyvekről (ELTE Radnóti), matematikatörténeti érdekességekről (Führerné Nagy Györgyi).

A vándorgyűlés szakmai programját soproni városnézések, Sopron környékén és Burgenlandban négy útvonalon 310 résztvevővel szervezett kirándulások egészítették ki.

A vándorgyűléshez július 5–6-án MAT-KAPOCS konferencia csatlakozott.

A vándorgyűlés befejezéseként az Oktatási Bizottság kibővített ülést tartott, értékelve a rendezvényt. Az Oktatási Bizottság jelenlévő tagjai megköszönték a Társulat Soproni Tagozatának a vándorgyűlés megrendezésében és tartalmi összeállításában végzett munkáját.

(A beszámolót Békefi Zsuzsa készítette.)

b) Csillag Pál Találkozó (Somlyósziget, július 5–9., résztvevők száma 18 fő)

Sajnos igen kevesen jöttek el, még kevesebben voltak ott az elejétől a végéig. (Összesen kb. 20-an fordultak meg, de az egyes napokon csak 10–15 ember volt.)

Viszont örvendetes volt, hogy – legalabbis némi buzdításra – a jelenlevők igen aktívak voltak: összesen 13 előadás hangzott el. Az előadások szerintem színvonalasak és érdekesek voltak. (Idén sajnos „öreg" előadót nem sikerült elhívni.)

A családias találkozó végeredményben jól sikerült, a jelenlevők jól érezték magukat és tanulhattak is egymástól, vagy legalábbis némi bepillantást nyerhettek egymás matematikai világába.

Mindezek ellenére én úgy gondolom, hogy a továbbiakban nem kéne túlzottan erőltetni a Csillag Pál találkozót.

Tudomásul kell vennünk, hogy a találkozóra (legalábbis ebben a formában) már nincs igény. Az utóbbi 1–2 évben a kevés résztvevő zöme is az én személyes hívásomra (gyakran hosszas rábeszélés után) jött el. Így az Ifjú Matematikusok Találkozója elnevezés mára kissé fellengzőssé vált.

(A beszámolót Keleti Tamás készítette.)

c) Kombinatorika és Gráfelmélet Kollokvium (Balatonlelle, július 15–19., résztvevők száma 143; 104 külföldi, 39 magyar (+ 33 fő kísérő))

Az 1996. évi „International Colloquium on Combinatorics and Graph Theory" c. konferenciát a Hotel Giuseppeben rendeztük meg Balatonlellén. Mint a várakozáson felüli résztvevőszám is mutatja, és a visszajelzésekből is ez derül ki, a konferencia – különösen szakmailag – sikeres volt. Némiképp szokatlan volt, hogy csak négy egy órás „nagyelőadás" volt, de a szekciókban is volt közel húsz kiemelt, 50 perces előadás. Elsősorban a négy nagyelőadást emelném ki, N. Alon pénzérmékről, V. Rödl regularitási lemmáról, A. Schrijver gráfinvariánsokról tartott és Erdős Pál szokásosan színes előadása nagy siker volt. Emellett kifejezetten sikeres volt a kombinatorikus optimalizálás, a biológiai alkalmazások és a gráfelmélet szekció. Nem volt igazán szerencsés a szekciókat előre rögzíteni. A szekciók, mint rendező elv jó, de menet közben, és nem előre kell őket definiálni, szervezőiket kiválasztani az előzetes jelentkezések alapján.

A színhelyválasztás jó volt, a szobák és az ellátás megfelelő, bár valahol a közelben néhány színvonalasabb (és így persze drágább) szoba az igényesebbek számára nem ártott volna.

A kötettel kapcsolatban a Publication Board kívánságára egy új kísérletet próbálunk ki, hogy csak felkért szerzők összefoglaló jellegű cikkei lesznek egy, így várhatóan kisebb terjedelmű, de reményeink szerint nagyobb sikerű kötetben, de ennek tapasztalatairól még nem tudok beszámolni.

(A beszámolót Győri Ervin készítette.)

d) Második Európai Matematikai Kongresszus (Budapest, július 22–26., résztvevők száma 724 fő (+ 109 fő kísérő))

A Kongresszus résztvevői közül 95-en voltak magyarok, a többség különböző európai országokból érkezett, néhányan voltak Észak-Amerikából, Ázsiából és Afrikából is.

A rendezvény két helyszínen zajlott: a Budapest Kongresszusi Központban és a Budapesti Műszaki Egyetemen. A tudományos program 10 plenáris előadásból, 36 – 4 párhuzamos szekcióban zajló (szintén meghívott) – előadásból, 6 kiselőadásból (melyeket a díjazottak tartottak), 7 különböző témájú kerekasztal összejövetelből, egy poszter-szekcióból, 11 könyv- és software kiállításából, valamint több, mint 5 órás szakmai filmvetítésből állt.

A kongresszus mottója a matematika egysége volt, melyet az alábbi előadások hangsúlyoztak különösen erősen:

J.-P. Serre: Correspondences and dictionaries in geometry and number theory,

J. Kollár: Low degree polynomial equations: arithmetic, geometry and topology,

G. Ben Arous: Large deviations as a common probabilistic tool for some problems of analysis, geometry and physics,

A. S. Merkurjev: K-theory and algebraic groups.

A párhuzamos előadásokat az erre kijelölt bizottság nagyon gondosan válogatta össze úgy, hogy az előadók egyrészt a modern matematika minden területét, másrészt Európát földrajzilag megfelelően képviseljék.

Kilenc 35 éven aluli matematikus kiemelkedő munkásságát ismerte el a Kongresszus az „Európai Matematikai Társulat Díjá"-val, melyet a jó sajtóvisszhangú megnyitón adott át Demszky Gábor főpolgármester és J.-P. Bourguignon, az Európai Matematikai Társulat elnöke. A díjazottak közül W. T. Gowers megoldotta a Banach hipersík problémát, A. Bonnett a Mumford–Shah sejtéssel kapcsolatban talált eredményt, J. Matoušek pedig egy kombinatorikai bizonyítatlan állításra talált egy fontos példát.

A posztereket a matematika szinte minden ágából, Európa legkülönbözőbb részeiről érkezők állították ki. A szerzők legjobbjai – szintén gondos válogatás után – a tartózkodási költségeiket fedező támogatásban részesültek. Ennek fő forrását a szponzorok pénze képezte.

A kerekasztal megbeszéléseken, mely különleges színfoltja volt a rendezvénynek, általános hallgatóság számára is élvezhető témák szerepeltek, melyek a közvéleményt foglalkoztatják, többek között a matematikai játékoknak az oktatásban betöltött szerepe, a matematika „public imag-e", a nők szerepe a matematikában és az elektronikus publikáció kérdései kerültek terítékre.

A kongresszusról készült könyvet a Birkhäuser Verlag adta ki.

(A beszámolót Balog Antal készítette.)

2. Az 1996. évi társulati díjak odaítéléséről

a) Szele Tibor Emlékérem

Az 1996. évi Szele Tibor emlékérmet a kiküldött bizottság *Dr. Hatvani Lászlónak,* a József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézete professzorának ítélte oda.

Indoklás. *Hatvani László* egyetemi tanulmányait '61 és '66 között a JATE-n végezte. 1975-ben lett kandidátus, 1988-ban akadémiai doktor, 1989-től egyetemi tanár. 1971-ben Grünwald Géza díjat, 1982-ben Kiváló Munkáért kitüntetést kapott. Kutatási témája a differenciálegyenletek kvalitatív elmélete. Eddig 72 tudományos publikációja jelent meg. Ezekre a hivatkozások száma közel 300.

Hatvani László harminc éve dolgozik a Bolyai Intézetben. Tudományos munkája lemérhető komoly érdeklődést kiváltó dolgozataiból, a témában szerte a világon dolgozók körében kivívott tekintélyéből, rangos konferenciákra világszerte való meghívásaiból. Tudományos munkájának külföldi értékelését, megbecsültségét jelzi az is, hogy 3 nemzetközi szakfolyóirat is felkérte szerkesztőbizottságába: Dynamic Systems and Applications; Nonlinear Studies; Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Tudományos munkája mellett kiemelkedő oktató- nevelő munkát végzett pályája első lépéseitől kezdve. Elsősorban az ő érdeme, hogy a Bolyai Intézetben igen erős differenciálegyenletes csoport működik. Két aspiránsa szerzett már kandidátusi fokozatot. Tanítványai körébe tartozik Terjéki József, Krisztin Tibor, Makay Géza, Wiandt Tamás, Karsai János, Klincsik Mihály; közülük már 5 kandidátus. Ph.D.-diákja Dályai Zsuzsa, diákköri dolgozatok témavezetőjeként irányította Gyurkovics Éva (ma már kandidátus), Szemők Árpád, Tossenberger József, Hans-Dietmar Gröger munkáját. Több mint 10 azon hallgatók száma, akik rangosabb, tudományos igényességű szakdolgozatot, ill. diplomamunkát írtak nála.

Nagy fontosságúak lettek az általa kezdeményezett, immár rendszeressé vált szegedi differenciálegyenletes konferenciák neves külföldi kutatók részvételével. A tanszéki rendszeres differenciálegyenlet szemináriumoknak, időnként meghívott külföldi előadókkal, ő a fő szervezője.

Egyetemi előadásai szerencsés módon ötvözik a hagyományos és modern elemeket. A matematikai gyakorlati alkalmazásai igen közel állnak hozzá. Végül az egyik legfontosabb, hogy Hatvani László nemcsak kiváló matematikus, hanem egy mások iránt őszintén érdeklődő, felelősséget vállaló ember. Ez tükröződik az akadémiáért, egyetemért, a kollégákért, hallgatókért vállalt lelkiismeretesen, pontosan végzett különféle munkáiban.

b) Grünwald Géza Emlékdíj

A díjat odaítélő bizottság – melynek az igen színvonalas javaslatok közül kellett kiválasztania a díjazottakat – úgy döntött, hogy *Jordán Tibort, Prokaj Vilmost, Szigeti Zoltánt* és *Tóth Gézát* részesíti a díjban.

Indoklás. *Jordán Tibor* 1967-ben született és 1991-ben végzett az ELTE TTK matematikus szakán. Ösztöndíjas volt, majd 1995-ben kandidátusi fokozatot szerzett. A díj odaítélésének évében a dániai Odense egyetemén dolgozott. 3 dolgozata jelent meg folyóiratokban, ugyancsak 3 konferencia-kiadványokban és 6 van megjelenés alatt. Társszerzői között van Frank András, egykori témavezetője, és Győri Ervin. Fő kutatási területe gráfok összefüggőségének strukturális kérdései.

Prokaj Vilmos 1966-ban született. Először villamosmérnöki diplomát szerzett a BME-n, majd nem sokkal később matematikus diplomát az ELTE-n. Az ELTE Doktori Iskolájának volt ösztöndíjasa, jelenleg az MTA Matematikai Kutatóintézetének tudományos segédmunkatársa. Eddig 4 közleménye jelent meg. Többségük témája Hilbert-terek lineáris operátorainak kiterjesztése, egy megjelent dolgozatában és egy megjelenés alatt álloban pedig folytonos függvények hálóiról ír.

Szigeti Zoltán 1969-ben született és 1991-ben végzett az ELTE TTK matematikus szakán. 1991 és 1994 között ösztöndíjasként dolgozott Frank András irányítása mellett. Számos nemzetközi konferencián számolt be eredményeiről. 3 dolgozata jelent meg folyóiratokban és 2 konferencia kiadványban. Elkészült dolgozatai száma azonban ennél jóval több. Fő kutatási területe a gráfok párosításának elmélete, különös tekintettel a T-kötések és T-vágások elméletére.

Tóth Géza 1968-ban született és 1991-ben szerzett matematikusi diplomát az ELTE-n. Ezután egy évet Belgiumban tanult, majd TMB ösztöndíjas volt az MTA Matematikai Kutatóintézetében. 1993 óta a Courant Institute ösztöndíjasa. Eddig 4 dolgozata jelent meg, de további 7 már elkészült. Munkái többségében Ramsey típusú geometriai ihletésű problémákkal foglalkozott.

c) Farkas Gyula Emlékdíj – nem adták ki

d) Rényi Kató Emlékdíj

A bizottság úgy határozott, hogy a Rényi Kató Emlékdíj II. fokozatát kapja *Bérczes Attila*, a debreceni KLTE végzett hallgatója.

Indoklás. *Bérczes Attila* érdekes új eredményeket ért el Turán Pál egy irreducibilis polinomokra vonatkozó problémájával kapcsolatban. Az eredményt tartalmazó dolgozatával első helyezést ért el a KLTE helyi TDK-konferenciáján. Dolgozatát javasolták az OTDK-n való bemutatásra. A nevezett eredmények hamarosan meg fognak jelenni a „Mathematics of Computation" amerikai folyóiratban. Az 1996-ban, Egerben megrendezett „Number Theory" nemzetközi konferencián „On a problem of Turán concerning irreducible polynomials" címmel előadást tartott eredményeiről.

e) Patai Alapítvány díja

A díjat odaítélő bizottság úgy határozott, hogy az 1996. évi díjat *Lévai Levente* kapja.

Indoklás. *Lévai Levente* 1969-ben született. Diplomáját az ELTE-n szerzete meg. 1994-ben kezdett el foglalkozni véges halmazok minimális klónjaival. Igen járatos a számítógépes algebrai módszerek használatában. A „Transactions of the American Mathematical Society" c. folyóiratban megjelent dolgozatában egy csoportelméleti probléma még nyitva maradt eseteit oldotta meg számítógépes módszerek segítségével. A gép lehetőségeinek kihasználásához hozzáértő alkotó munkájára volt szükség. Újabban pro-véges, azaz véges csoportok inverz limeszeként előálló topologikus csoportokkal foglalkozik. Ez a csoportelmélet egyik forrásban lévő, a vizsgálatok homlokterében álló témája.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

ISSN 0025-519X

Nyomdai Munkák: Modok és Társa Kft., Kiskunhalas - Tel.: 77/421-344/153

13

Matematikai Lapok

1996/3–4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 6. évfolyam (1996), 3–4. szám

(Megjelent 2000-ben)

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 201–7656.

Egyes szám ára 400 Ft+ÁFA.

* Megjegyzés: Korábbi előfizetőknek a lap ára az eddigi befizetés függvénye.

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

NÉGYDIMENZIÓS SOKASÁGOK TOPOLÓGIÁJA – ÁTTEKINTÉS

STIPSICZ ANDRÁS

Topologikus terek legkézenfekvőbb nemtriviális példáit adják a (topologikus és sima) *sokaságok*. Definíciójuk szerint ezek a terek lokálisan (minden pont egy kis környezetében) olyanok, mint valamilyen $\mathbf{R}^n$ euklideszi tér. Az ilyen topologikus tereknek a matematika más ágaiban (és a fizikában) játszott fontos szerepük miatt természetes igény merült fel osztályozásukra. Poincaré mintegy 100 évvel ezelőtt írott munkáiban már felvetődött az osztályozás kérdése – lásd pl. a Poincarénak tulajdonított sejtést egyszeresen összefüggő 3-sokaságokról (1.14. Megjegyzés).

Természetesnek tűnő elvárás volt, hogy a sokaságon értelmezett különböző differenciálhatósági struktúrák (ld. 1.2. Definíció) közti megkülönböztetés a lényeget nem érinti, így célként kitűzhetőnek tűnt a topologikus sokaságok teljes invariánsrendszerének (pl. homotópia- és homológia-csoportok, stb.) megtalálása majd annak belátása, hogy differenciálható struktúrák az így meghatározott topologikus sokaságokon már egyértelműen léteznek. 1- és 2-dimenziós sokaságokra a program könnyen keresztülvihetőnek bizonyult, és 3-dimenzióban is bíztatóan alakult (ld. például az 1.9. Tételt). Milnor 1956-ban megjelent cikke [17] azonban magasabb dimenziókban eloszlatta ezeket a várakozásokat: Hirzebruch egy eredményére alapozva Milnor olyan X sima 7-sokaságot konstruált, mely homeomorf, de nem diffeomorf az S^7 7-dimenziós gömbfelülettel. A '60-as években Smale [27] (a h-kobordizmus-tétel bebizonyításával) megvetette a négynél magasabb dimenziós sokaságok osztályozásának alapjait. A talált eredmények szerint ezekben a dimenziókban a sokaságok topológiai/differenciáltopológiai tulajdonságai döntően azok algebrai topológiai invariánsaitól (homotópia- ill. (ko)homológia-csoportok, karakterisztikus osztályok) függenek; lásd az 1.2. fejezetet. A kimaradó $n = 3, 4$ dimenziók túl "kicsik" voltak ahhoz, hogy Smale bizonyításának egyik alapköve, az ún. "Whitney-trükk" elvégezhető legyen. A '70-es évek közepén Thurston híres sejtése formájában fogalmazta meg a 3-dimenziós sokaságok osztályozásának egy lehetséges megközelítését. (Erről a sejtésről a későbbiekben – vázlatosan – még lesz szó.) Eszerint $n = 3$-ra a sokaság tulajdonságai döntően annak geometriai tulajdonságaitól függnek.

A 4-dimenziós sokaságok elméletében Freedman és Donaldson '82-es eredményei hoztak döntő áttörést. Egy meglehetősen bonyolult konstrukció segítségével

Freedman belátta azt, hogy a Whitney-trükk *topologikusan* 4-dimenzióban is elvégezhető, amiből már a (topologikus) h-kobordizmus-tétel illetve (egyszeresen összefüggő) topologikus 4-sokaságok osztályozása adódott (lásd 2.3. Tételt). Egy, a sokaság differenciálgeometriai tulajdonságain alapuló differenciáloperátor megoldásait vizsgálva Donaldson sima struktúra létezésének új akadályát, később pedig sima struktúrák (a korábbiaknál lényegesen érzékenyebb) invariánsát találta meg. 1994-ben ezeket az invariánsokat váltották fel a Seiberg és Witten által definiált – fizikai megfontolásokon alapuló – ún. *Seiberg–Witten*-invariánsok. Ezen eredmények által lehetővé vált számos topologikus 4-sokaságon végtelen sok (nem-diffeomorf) sima struktúra, illetve kontinuum sok $\mathbf{R}^4$-gyel homeomorf de vele nem-diffeomorf sima sokaság (ún. egzotikus $\mathbf{R}^4$) létezésének bizonyítása. Sima 4-sokaságok osztályozása azonban még sejtés formájában sem ismert. Bizonyos alosztályok (pl. komplex felületek vagy szimplektikus 4-sokaságok) tulajdonságainak megértésében komoly előrelépések történtek a közelmúltban, a teljes válasz megtalálása azonban reménytelenebbnek tűnik mint valaha.

Ebben a rövid áttekintésben (az $n \neq 4$ dimenziókban elért főbb eredmények felvillantása után) a sima 4-sokaságok elméletében a közelmúltban elért legfontosabb eredményeket, illetve a kutatókat napjainkban leginkább foglalkoztató kérdéseket szeretnénk bemutatni. A különböző témakörökben elmélyedni kívánó olvasó figyelmébe ajánljuk Freedman és Quinn [7] topologikus, Donaldson és Kronheimer [3] sima, Friedman és Morgan [8] komplex valamint McDuff és Salamon [16] szimplektikus 4-sokaságokról szóló könyvét. Morgan rövid jegyzete [23] a Seiberg–Witten-elméletbe nyújt bepillantást, míg Gompf és a szerző kötete [13] több, e cikkben érintett kérdést vizsgál nagyobb alapossággal és ad további referenciákat.

1. Sokaságok

Előljáróban tisztázni szeretnénk azokat az objektumokat (és leképezéseket) amikkel a továbbiakban dolgozni fogunk. Egy X topologikus teret *sokaságnak* nevezünk ha minden pontjának van valamely $\mathbf{R}^n$ egy nyílt részhalmazával homeomorf környezete. Vagyis minden $p \in X$ pontra létezik egy $U \subset X$, p-t tartalmazó nyílt halmaz és egy $\varphi_U : U \to V \subset \mathbf{R}^n$ homeomorfizmus ($V \subset \mathbf{R}$ nyílt). (Az (U, φ_U) párt egy p körüli térképnek is nevezik.) Fel szokás tenni továbbá, hogy X szeparábilis Hausdorff-tér. A továbbiakban (az egyszerűség kedvéért) mi azt is fel fogjuk tenni, hogy X kompakt, így jobbára csak *kompakt sokaságokról* fogunk beszélni. X komponenseit külön-külön vizsgálva feltehető az is, hogy X összefüggő. (Egy nevezetes tétel szerint összefüggő sokaságra a definícióban szereplő $\mathbf{R}^n$-beli n állandó, ilyenkor n-dimenziós sokaságról beszélünk.)

1.1. Megjegyzés. Egy X topologikus teret *peremes sokaságnak* hívunk ha minden pontjának az $\mathbf{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ felső féltér egy nyílt részével van homeomorf környezete. Azon pontok halmaza, melyek a térképezések során az

$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n = 0\} \subset \mathbf{R}^n_+$ altérre képződnek, alkotják X *határát*; ezt a továbbiakban ∂X-szel jelöljük. Könnyen belátható, hogy egy X n-dimenziós peremes sokaság ∂X határa egy (határ nélküli) $(n-1)$-dimenziós sokaság. Amennyiben X kompakt és perem nélküli (tehát $\partial X = \emptyset$), úgy X-et *zárt* sokaságnak nevezik.

Könnyen látható, hogy (az U környezet és φ_U esetleges változtatásával) a definícióban szereplő V-ről feltehető, hogy $\mathbf{R}^n$ egységgömbjével egyenlő. Ilymódon egy sokaság megadásához azt kell pusztán megértenünk, hogy a különböző pontok körüli egységgömbök hogyan vannak összeragasztva. Egy $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) térképpárra képezhető a $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} = g_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \to V_\alpha \cap V_\beta$ kompozíció, mely tehát $\mathbf{R}^n$ egy nyílt részéről képez önmagára. Ezeket a függvényeket *áttérési függvényeknek* hívjuk. Sokaságok feltérképezése tehát nem is tűnik nehéznek: pusztán az áttérési függvények rendszerét kell megértenünk. Ezeket a függvényeket azonban nehézkes megadni, így összehasonlítani is – még nehezebbnek tűnik annak eldöntése, hogy két rendszer mikor határoz meg homeomorf topologikus teret, tehát homeomorf sokaságot.

Az osztályozás kérdése tovább finomítható úgy, hogy az áttérési függvények rendszerére feltételeket szabunk.

1.2. Definíció. Egy X topologikus tér (n-dimenziós) C^r*-sokaság,* ha létezik térképek olyan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ rendszere, hogy $\bigcup U_\alpha = X$ és a $g_{\alpha\beta}$ áttérési függvények r-szer folytonosan differenciálhatók. $r = 0$-ra a sokaságot *topologikus* sokaságnak, $r = \infty$ esetén pedig *sima* sokaságnak nevezzük. (Amennyiben az áttérési függvények analitikusak, úgy X-et C^ω, másképp *valós analitikus* sokaságnak hívjuk.)

1.3. Megjegyzés. Páros $n = 2m$ esetén $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{C}^m$ m-dimenziós komplex térrel azonosítható; amennyiben található olyan térképrendszer, hogy az áttérési függvények holomorfak, úgy X-et (evvel a térkép-rendszerrel ellátott) *komplex* (vagy *komplex analitikus*) sokaságnak hívjuk. Ha az áttérési függvények valójában komplex polinomok, akkor X egy *algebrai* sokaság. Ez utóbbi fogalmakkal csak későbbi fejezetekben fogunk (érintőlegesen) foglalkozni.

Két C^r-sokaságot azonosnak (vagy C^r*-diffeomorfnak*) tekintünk, ha létezik közöttük egy olyan homeomorfizmus, mely a térképeken C^r-leképezés. Vegyük észre, hogy $r > 0$ esetén egy C^r-sokaságon értelmezett valós értékű függvényről eldönthető, hogy differenciálható-e (a lánc-szabály szerint ez a tulajdonság nem függ a választott térképtől), a derivált értéke azonban a választott térképtől is függhet, ilymódon egy függvény deriváltja nem lesz a sokaságon definiált függvény. A sokaságok osztályozására korábban feltett kérdésünket tehát így finomíthatjuk: Soroljuk fel az összes n-dimenziós (zárt) topologikus sokaságot és mindegyikre döntsük el, ellátható-e C^1-struktúrával, és ha igen, hány különböző (nem C^1-diffeomorf) struktúrát hordoz. Ezeken a C^1-sokaságokon vizsgáljuk meg a különböző C^2-struktúrák létét, és így tovább. Első látásra a kérdés túlságosan bonyolultnak látszik, a következő tétel azonban javít a képen:

1.4. Tétel. *Legyen X adott C^r-sokaság és tegyük fel, hogy $r > 0$. Ekkor minden $s \geq r$ esetén ($s = \infty$-t, sőt ω-t is beleértve) létezik a C^r-struktúrát definiáló térképrendszernek egy olyan részrendszere, mely X-en C^s-struktúrát definiál. Az ilymódon kapott C^s-struktúra (C^s-diffeomorfizmus erejéig) egyértelmű.* ■

A tétel szerint tehát pusztán a topologikus sokaságokat kell felsoroljuk, majd mindegyik mellé azt kell feljegyezzük, hogy hordoz-e sima struktúrát (és ha igen, hány nem-diffeomorfat). A továbbiakban a fenti kérdésnek $n = 4$ esetére adott (részleges) válaszát szeretnénk ismertetni – ahhoz azonban, hogy a 4-dimenziós eset furcsaságait megértsük, röviden át kell tekintenünk a más dimenziókban eddig elért eredményeket. Mielőtt ezt elkezdenénk, meg kell azonban ismerkednünk két alapvető definícióval.

1.5. Definíció. Egy $(X, \partial X)$ (esetleg peremes) n-dimenziós (topologikus) sokaságot *irányítható* sokaságnak nevezünk, ha $H_n(X, \partial X; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$. A fenti $(X, \partial X)$ egy *irányítását* $H_n(X, \partial X; \mathbf{Z})$ egy generátorának rögzítésével adjuk meg. (A választott generátort $[X]$-szel jelöljük, és az irányított sokaság *fundamentális osztályának* nevezzük.) A $-[X] \in H_n(X, \partial X; \mathbf{Z})$ generátor rögzítésével fordíthatjuk meg egy adott (irányított) X sokaság irányítását; a kapott irányított sokaságot ilyenkor $\overline{X}$-szel szokás jelölni.

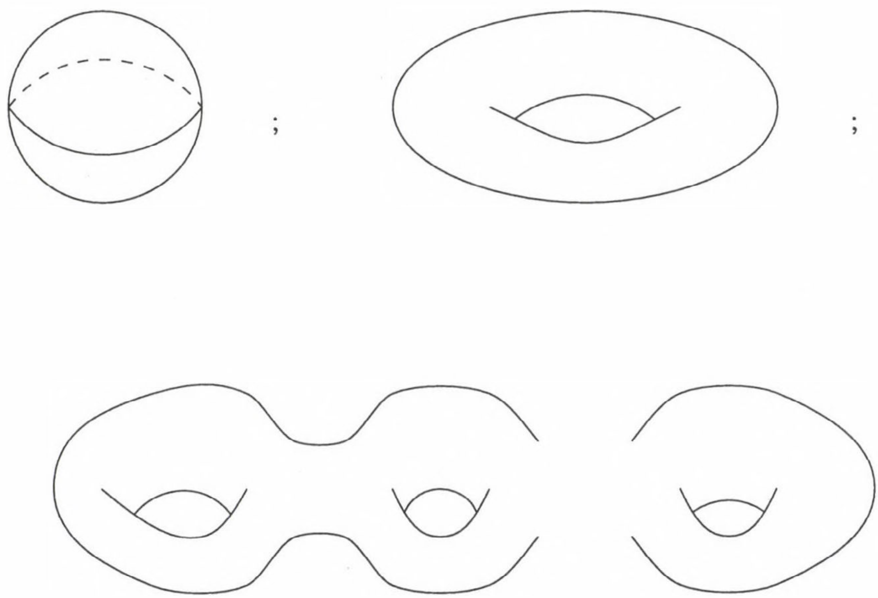
1.6. Megjegyzés. Egy vektortér irányításán általában egy bázisában a vektorok sorrendjének (páros permutáció erejéig történő) rögzítését értjük. Egy sima sokaság irányítását pedig úgy szokás megadni, hogy minden pont érintőterét (a fenti értelemben) irányítjuk, és feltesszük, hogy közeli pontokan az irányítások kompatibilisek. Nem túl nehéz érvelés (lásd pl. [21]) mutatja, hogy ez a fogalom és a fenti definíció valójában ekvivalensek. További érvelésünkben mi a fenti definícióban leírt megközelítést fogjuk alkalmazni; vegyük észre, hogy az a C^0 (topologikus) esetben is alkalmazható (míg az érintőtér létezéséhez a sokaság simaságát szükséges feltételezni).

Legyen most X irányított n-dimenziós sima sokaság, Y_1, Y_2 pedig egymást transzverzálisan metsző k- és $(n-k)$-dimenziós beágyazott, zárt, irányított részsokaságok X-ben. Ekkor egy $p \in Y_1 \cap Y_2$ metszéspontban T_pY_1 egy pozitív bázisát T_pY_2 egy pozitív bázisával összefűzve T_pX egy bázisát kapjuk; p pozitív metszéspont ha ez a bázis pozitív, és negatív egyébként. A metszéspontok előjeleit összeadva Y_1 és Y_2 *algebrai metszésszámát,* $Y_1 \cdot Y_2$-t kapjuk meg. (Az $Y_1 \cap Y_2$ halmaz elemszámát a két részsokaság *geometriai metszésszámának* nevezzük.) Vegyük észre, hogy $Y_1 \cdot Y_2$ és $Y_2 \cdot Y_1$ nem feltétlenül egyenlő: k és n paritásától függően előjelük különbözhet.

1.1. Alacsony dimenziók.

Aránylag egyszerű feladat belátni azt, hogy egyetlen 1-dimenziós (zárt, összefüggő) topologikus sokaság létezik, mely az $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ körvonallal homeomorf. Ez a sokaság egyértelműen látható el sima struktúrával; a megfelelő térképek megtalálását az olvasóra bízzuk. A zárt 2-dimenziós felületek leírása a topológia egy klasszikusnak számító fejezete. Szorítkozzunk most arra az esetre, amikor a sokaságról feltesszük, hogy irányítható.

1.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy X egy zárt, összefüggő, irányítható topologikus 2-sokaság. Ekkor X valamilyen $g \geq 0$-ra a g nemű Σ_g Riemann-felülettel homeomorf (lásd az 1. ábrát). Minden fenti sokaság egyértelműen látható el sima struktúrával.*
∎



1. ábra. Riemann-felületek

A Σ_g Riemann-felületek valójában komplex analitikus, sőt algebrai struktúrával is elláthatók. Vegyük észre, hogy Σ_g valójában g darab $\Sigma_1 = S^1 \times S^1 = T^2$ tóruszból rakható össze a következő, *összefüggő összeg* nevű operáció segítségével.

1.8. Definíció. Legyenek X_1, X_2 n-dimenziós sokaságok és $\varphi_i : D^n \to X_i$ ($i = 1,2$) az n-dimenziós D^n golyó beágyazásai. Ekkor az $X_1 - \varphi_1(\operatorname{int} D^n) \cup X_2 - \varphi_2(\operatorname{int} D^n)/\sim$ faktort (ahol $\varphi_1(x) \sim \varphi_2(x)$ minden $x \in \partial D^n$) az X_1 és X_2 összefüggő összegének nevezzük és $X_1 \# X_2$-vel jelöljük. (Belátható, hogy összefüggő C^r-sokaságok esetén az összefüggő összeg egyértelműen látható el C^r-struktúrával.)

Könnyen látható, hogy $\Sigma_g \# \Sigma_h = \Sigma_{g+h}$, így tehát $\Sigma_g = \# g \Sigma_1$ (ahol $\# 0 \Sigma_1$ jelentse az S^2 gömbfelületet). Összegezve tehát, minden (zárt, irányítható) 2-dimenziós sokaság S^1-ből és S^2-ből építhető fel a direkt szorzat és az összefüggő összeg alkalmazásával.

Térjünk rá most a 3-dimenziós eset tárgyalására. A következő tétel szerint ebben a dimenzióban (hasonlóan az 1- ill. 2-dimenzióban látottakhoz) nem kell a topologikus és sima eset között különbséget tenni, hiszen

1.9. Tétel ([22]). *Minden irányított, zárt topologikus 3-sokaság egyértelműen látható el sima struktúrával.* ■

1.10. Definíció.

- Egy M 3-sokaság *prím* ha minden $M = M_1 \# M_2$ összefüggő összegre bontás esetén M_1 vagy M_2 az S^3 gömbfelülettel azonosítható. M *irreducibilis,* ha nem tartalmaz olyan beágyazott S^2-t, mely M-et két részre bontja. (Könnyen belátható, hogy egy prím 3-sokaság vagy irreducibilis vagy $S^1 \times S^2$-vel homeomorf.)
- Egy $i : \Sigma_g \hookrightarrow M$ beágyazás *összenyomhatatlan,* ha az indukált $i_* : \pi_1(\Sigma_g) \to \pi_1(M)$ homomorfizmus injektív.
- Egy M zárt 3-sokaság *egyszerű,* ha nem tartalmaz összenyomhatatlan tóruszt. Egy peremes 3-sokaságot pedig akkor nevezünk egyszerűnek, ha minden összenyomhatatlan tórusz a perem egy részével izotóp.
- Legyen $S_{p,q}$ az az S^1-fóliázott 3-sokaság, melyet $[0,1] \times D^2$ faktoraként állítunk elő úgy, hogy a $\{0\} \times D^2$ és $\{1\} \times D^2$ golyókat egy $2\pi\frac{p}{q}$ szögű forgatással azonosítjuk ($\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$). A természetesen adódó S^1-fóliázást $S_{p,q}$-n a következő módon kapjuk: $[0,1] \times \{0\}$ maga egy S^1-et, míg a $[0,1] \times \{x_i\} \subset [0,1] \times D^2$ ($i = 0, \ldots, q-1$; és $x_i = x_0 \cdot \xi^i$ egy primitív q-adik egységgyökre) szakaszok egyesítése további S^1-eket definiál az $S_{p,q}$ faktortérben. (Vegyük észre, hogy $S_{p,q}$ az $S^1 \times D^2$ 3-sokasággal diffeomorf; ez a diffeomorfizmus azonban nem feltétlenül őrzi meg a fóliázást.) Az M 3-sokaság *Seifert-fibrált* ha létezik rajta olyan S^1-fóliázás, melynek minden fibrumára létezik annak olyan környezete, mely valamely fenti $S_{p,q}$ sokasággal fibrumtartó módon diffeomorf.

1.11. Tétel (Kneser és Milnor). *Minden 3-sokaság (a sorrendtől eltekintve) egyértelműen bontható fel prímek összefüggő összegére.* ■

A következőkben tehát minding feltesszük, hogy M prím. Az alábbi tétel alapvetőnek bizonyult a 3-sokaságok feltérképezésében

1.12. Tétel (Jaco–Shalen, Johansson). *Minden M prím 3-sokaság tartalmazza beágyazott tóruszoknak egy (izotópia erejéig egyértelmű) $(T_1, \ldots, T_k)$ rendszerét úgy, hogy $M - \cup_{i=1}^k T_i$ komponenseinek lezártjai (mint peremes 3-sokaságok) vagy egyszerűek vagy Seifert-fibráltak.* ■

Informálisan tehát a fenti két tétel értelmében gömbök menti vágásokkal egy 3-sokaság prímekre, ezek pedig tóruszok menti vágásokkal egyszerű vagy Seifert-fibrálható részekre bonthatók fel. A megfelelő $\frac{p}{q}$ paraméterek, illetve az S^1-hatás faktoraként kapható 2-dimenziós sokaságok ismeretében a Seifert-fibrált 3-sokaságok jól áttekinthetők. 3-sokaságok teljes feltérképezéséhez tehát csak az egyszerű 3-sokaságokat kell jobban megértenünk. Erre a kérdésre Thurston adott – híres sejtése formájában – választ 1976-ban; sejtését azonban (számos speciális esetet leszámítva) azóta sem sikerült igazolni. A sejtés kimondásához két esetet kell – a sokaság fundamentális csoportja alapján – megkülönböztetnünk.

1.13. Sejtés. *Egy véges fundamentális csoportú 3-sokaság az S^3/G faktorral diffeomorf, ahol $G \subset \mathrm{Isom}(S^3)$. (Itt $\mathrm{Isom}(S^3)$ a 3-dimenziós gömbfelület izometriáinak csoportját jelenti, ahol S^3-at a természetes metrikával láttuk el.)*

1.14. Megjegyzés. A fenti sejtés az alábbi két (híres) megoldatlan problémával ekvivalens:

1. Ha egy M (zárt) 3-sokaságra $\pi_1(M) = 1$, akkor M az S^3 gömbfelülettel diffeomorf. (*Poincaré-sejtés.*)
2. Egy G véges csoport S^3-on értelmezett szabad hatása egy lineáris csoporthatással ekvivalens, vagyis G az $\mathrm{Isom}(S^3)$ csoport részcsoportjának tekinthető.

Végtelen fundamentális csoportú egyszerű 3-sokaságokra találta Thurston nevezetes *geometrizálhatósági* sejtését:

1.15. Sejtés (Thurston). *Tegyük fel, hogy M olyan végtelen fundamentális csoportú, egyszerű 3-sokaság, melyen nem létezik Seifert-fibrálás. Ekkor M a $\mathbf{H}^3/G$ faktorral diffeomorf valamely $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^3)$ részcsoportra, ahol $\mathbf{H}^3$ a 3-dimenziós hiperbolikus teret jelöli.*

1.16. Megjegyzés. A fenti sejtés tehát úgy is megfogalmazható, hogy egy egyszerű, végtelen fundamentális csoportú (nem Seifert-fibrálható) 3-sokaság hiperbolikus struktúrával (vagyis konstans -1 görbületű Riemann-metrikával) látható el. A Mostow–Prasad merevségi tétel értelmében amennyiben M-en létezik hiperbolikus metrika, úgy az egyértelmű. Ilymódon tehát (a sejtés értelmében) 3-sokaságok topológiáját azok geometriai tulajdonságai határozzák meg.

Bár az eddigiekben csak irányítható, zárt 3-sokaságokról beszéltünk, az elmélet nagy része (kettős fedés vételével) kiterjed a nemirányítható esetre is, néhány definíció módosításával pedig az eredmények peremes 3-sokaságokra is általánosíthatóak. Könnyen belátható az is, hogy egy Σ_g Riemann-felület $g \geq 2$ esetén hiperbolikus struktúrával látható el, vagyis $\mathbf{H}^2/\pi_1(\Sigma_g)$ alakban áll elő. (Ismert az is, hogy $T^2 = \Sigma_1 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$.) Ilymódon tehát a 2-dimenziós sokaságok elmélete is megfogalmazható a sokaságon értelmezhető speciális görbületű metrikák segítségével. (Bővebben erről lásd [31], illetve [25] munkákat.) Összefoglalva tehát $n \leq 3$ esetén a topologikus és sima osztályozás között semmi különbség nincs, és az osztályozásban a sokaság geometriai tulajdonságai játszanak főszerepet. Térjünk most rá az $n \geq 5$ eset tárgyalására.

1.2. Magasabb dimenziók. Mint ahogy azt látni fogjuk, $n \geq 5$ esetén az n-dimenziós sokaságok tulajdonságait alapvetően azok algebrai topológiai tulajdonságai döntik el. A továbbiak tárgyalása előtt azonban egy újabb feltételt kell kirónunk a vizsgálandó sokaságokra, mivel

1.17. Tétel. *Tetszőleges G végesen prezentált csoportra és $n \geq 4$ egészre létezik olyan zárt, irányítható n-dimenziós M sima sokaság, melyre $\pi_1(M) \cong G$ teljesül.* ■

Mivel pedig a (végesen prezentálható) csoportok izomorfizmus-problémája algoritmikusan meg nem oldható feladat, tetszőleges fundamentális csoportú n-sokaságok teljes osztályzása sem várható $n \geq 4$ esetén. A továbbiakban tehát feltesszük majd, hogy a vizsgált sokaságokra $\pi_1 = 1$ teljesül, azaz csak zárt, irányítható, *egyszeresen összefüggő* sokaságok vizsgálatára szorítkozunk.

Legyen tehát M egy fenti tulajdonságokkal rendelkező n-sokaság, és tekintsük $k \leq n$-re a $D^k \times D^{n+1-k}$ (egyébként a $D^{n+1} = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$ golyóval homeomorf) $(n+1)$*-dimenziós k-fogantyút.* (A k számot a fogantyú *indexének* fogjuk nevezni.) Egy $\varphi : \partial D^k \times D^{n+1-k} \to M \times \{1\}$ beágyazást rögzítve a $W = M \times [0,1] \cup_\varphi D^k \times D^{n+1-k}$ peremes $(n+1)$-sokaság képezhető. (W tehát úgy keletkezik, hogy $M \times [0,1]$ és $D^k \times D^{n+1-k}$ határainak egy részét φ segítségével azonosítva képezzük a megfelelő faktorteret, mely egyértelműen látható el sokaság-struktúrával.) W határának két komponense az $M = M \times \{0\}$ illetve az $M' = \big(M \times \{1\} - \varphi(\partial D^k \times D^{n+1-k})\big) \cup_{\varphi|\partial D^k \times \partial D^{n+1-k}} (D^k \times \partial D^{n+1-k})$ sokaságokkal azonosítható. A W $(n+1)$-sokaságot M és M' közötti *elemi kobordizmusnak* nevezzük, M'-re pedig azt mondjuk, hogy M-ből φ menti *műtéttel* kapható meg. Egy elemi kobordizmus indexén a benne szereplő fogantyú indexét értjük.

1.18. Definíció. A $\varphi(\partial D^k \times \{0\}) \subset M$ gömböt a fogantyú *ragasztási gömbjének*, míg a $\{0\} \times \partial D^{n+1-k} \subset M'$ gömböt a fogantyú *övgömbjének* hívjuk.

Általánosabban, adott M_1, M_2 zárt, irányított n-sokaságokra a W irányított, kompakt $(n+1)$-sokaság egy *kobordizmus,* ha $\partial W = M_1 \cup \overline{M}_2$; szemléletesen szólva, W egy hártya M_1 és M_2 között. Vegyük észre, hogy egy M_1 és M_2 közötti W_1 és egy M_2 és M_3 közötti W_2 kobordizmus egy $f : M_2 \to M_2$ azonosítást rögzítve egy W, M_1 és M_3 közötti kobordizmussá fűzhető össze.

1.19. Tétel ([18]). *Egy adott W sima kobordizmusra létezik elemi kobordizmusok olyan $W_1, \ldots, W_m$ sorozata, hogy W_i-k alkalmas összefűzésével éppen W-t kapjuk meg. Feltehető továbbá, hogy a W_i-ben szereplő fogantyú k_i indexére $k_1 \leq \ldots \leq k_m$ teljesül.* ■

(A fenti tétel $n > 3$-at feltételezve valójában topologikus kobordizmusokra is teljesül.) A következő tétel a továbbiakban alapvető fontosságú lesz.

1.20. Tétel. *Tegyük fel, hogy W_1 és W_2 (szomszédos indexű) elemi kobordizmusok M_1 és M_2 valamint M_2 és M_3 között, és M_2-ben W_1 övgömbje pontosan egy pontban (transzverzálisan) metszi W_2 ragasztási gömbjét. Ekkor a W_1 és W_2 összefűzésével kapott W kobordizmus triviális, azaz $M \times [0,1]$-gyel diffeomorf. Speciálisan, M_1 és M_3 diffeomorf sokaságok.* ■

Egy fent leírt (W_1 és W_2 elemi kobordizmusokkal megadott) fogantyúpárt *elhagyható párnak* szokás nevezni. Vegyük észre, hogy az összefűzéshez használt f azonosítást M_2 egy izotópiájával megváltoztatva az eredményül kapott W sokaság diffeomorfizmus-osztálya nem változik. Most már kimondhatjuk a magasabb dimenziós sokaságok osztályozásában használt legfontosabb tételt:

1.21. Tétel (h-kobordizmus-tétel, [27], [19]). *Legyenek M_1, M_2 egyszeresen összefüggő n-dimenziós (zárt, irányított) sokaságok és W olyan kobordizmus köztük, melyre az $i_j : M_j \to W$ beágyazások homotopikus ekvivalenciák ($j = 1, 2$). $n \geq 5$ esetén ebből következik, hogy W a triviális $M \times [0,1]$ kobordizmussal azonos, így M_1 és M_2 diffeomorfak.*

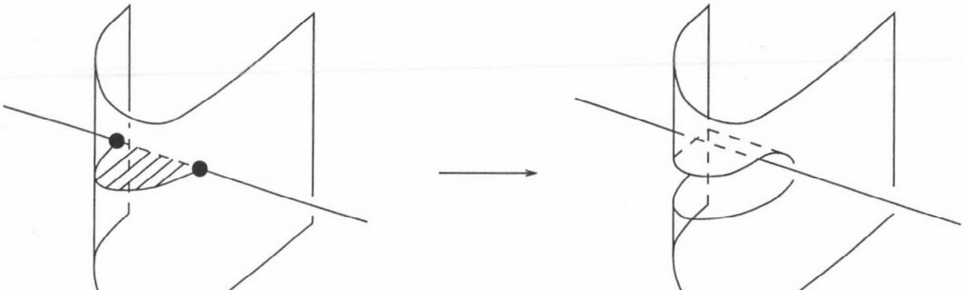
Bizonyítás. Rögzítsük W-nek egy $W_1, \ldots, W_m$ elemi kobordizmusok összefűzöttjeként való felbontását. Azt kell pusztán megmutatnunk, hogy az elemi kobordizmusok úgy is megválaszthatók, hogy a W_{2i-1}, W_{2i} kobordizmusok fogantyúi elhagyható párokat alkossanak, így az 1.20. Tétel értelmében (indukciót alkalmazva) a tétel bizonyítása könnyen adódik. Egyszerű algebrai megfontolásokat igényel csak annak megmutatása, hogy W-nek létezik olyan $W_1, \ldots, W_m$ felbontása, melyben a W_{2i-1}, W_{2i} párok megfelelő (ragasztási és öv-) gömbjei *algebrailag* egyszer metszik egymást, azaz a két gömb $\{p_0, p_1, q_1, \ldots, p_t, q_t\}$ metszépontjai párokba állíthatók (p_0 kivételével) úgy, hogy p_i és q_i előjele különböző. (Ezen $W_1, \ldots, W_m$ sorozat megtalálásához kell felhasználnunk a W kobordizmusra a tételben kirótt algebrai topológiai feltételt; az ilyen tulajdonságú kobordizmusokat *h-kobordizmusoknak* nevezzük.)

A h-kobordizmus-tétel belátásához azt kell tehát belátnunk, hogy ha a W_1, W_2 elemi kobordizmusok ragasztó és övgömbjei algebrailag egy pontban metszik egymást, akkor alkalmas izotópiát alkalmazva a $\{p_i, q_i\}$ ellentétes előjelű metszéspontpárok eltüntethetők, így az 1.20. Tétel alkalmazásával a bizonyítás meg is lenne. A fent vázolt terv $n \geq 5$ esetre való keresztülvihetőségét mutatja meg a következő lemma. (Vegyük észre, hogy a h-kobordizmus-tétel bizonyításának ez az egyetlen lépése, ahol az $n \geq 5$ feltételt alkalmazzuk – a további lépések $n = 4$ esetén is helyesek.)

1.22. Lemma (Whitney-trükk). *Legyen X egyszeresen összefüggő (irányított) n-dimenziós sokaság, az $Y_1, Y_2 \subset X$ zárt, irányított k- és $(n-k)$-dimenziós részsokaságokról pedig tegyük fel, hogy egymást transzverzálisan metszik, $k \geq 2$ és $n - k \geq 3$ (és $k = 2$ esetén $\pi_1(X - Y_2) = 1$). Legyenek továbbá $p, q \in Y_1 \cap Y_2$ ellentétes előjelű* *metszéspontok. Ekkor $n \geq 5$ esetén létezik egy olyan $\varphi : X \to X$ izotópia, hogy $Y_1 \cap \varphi(Y_2) = Y_1 \cap Y_2 - \{p, q\}$ – vagyis Y_1 és $\varphi(Y_2)$ metszetéből p és q eltüntethető.*

1.23. Megjegyzés. Whitney a fenti állítást valójában egy másik nevezetes tétel bizonyításához dolgozta ki. Könnyen belátható ugyanis, hogy egy M^n n-dimenziós sokaság $\mathbf{R}^{2n+1}$-be ágyazható. (Valójában egy generikus $M^n \to \mathbf{R}^{2n+1}$ leképezés – dimenzió okokból – beágyazás lesz.) Hasonlóan mutatható meg, hogy kompakt M^n esetén egy generikus $M^n \to \mathbf{R}^{2n}$ leképezés véges sok (transzverzális) önátmetszést tartalmaz. Whitney belátta azt, hogy a fent ismertetett Whitney-trükk megfelelő formáját alkalmazva ezek az önátmetszések eltüntethetők, vagyis a generikus $M^n \to \mathbf{R}^{2n}$ leképezés beágyazássá tehető. (Jóval összetettebb eszközöket igényel annak belátása, hogy ha M^n irányítható, akkor az már $\mathbf{R}^{2n-1}$-be is beágyazható. Az $\mathbf{RP}^{2^k}$ 2^k-dimenziós valós projektív terek olyan sokaságokra adnak példát, melyek nem ágyazhatók be $\mathbf{R}^{2^k-1}$-be, ld. [21].)

Bizonyítás. A Whitney-trükk bizonyítása vázlatosan a következő módon megy: Legyen γ_1 és γ_2 a p és q pontokat Y_1-ben és Y_2-ben összekötő egy-egy út. A feltételekből következik, hogy $\gamma_1 \cup \gamma_2$ egy $X - (Y_1 \cup Y_2)$-be képzett D^2 golyó határaként állítható elő. Mivel X dimenziója legalább 5, erről a körlapról feltehető, hogy beágyazott, így környezete $D^2 \times D^{n-2}$-vel azonosítható. Ekkor pedig a megfelelő izotópia megtalálása lokális problémává redukálódik, aminek megoldása egyszerű feladat. (Az $n = 3, k = 1$ esetre lásd a 2. ábrát.) ■



2. ábra. Whitney-trükk

A Whitney-trükk ismételt alkalmazásával (az $n \geq 5$ feltételt figyelembe véve, és a $k = 1$ esetet külön kezelve) a h-kobordizmus-tétel bizonyítása most már nem túlságosan nehéz. ■

A h-kobordizmus-tétel következményeként látta be Smale az ún. *általánosított Poincaré-sejtést* $n \geq 5$ esetén:

1.24. Tétel (Smale, [27]). *Ha M^n egyszeresen összefüggő, n-dimenziós sima zárt sokaság, melyre $n \geq 5$ és $H_*(M^n; \mathbf{Z}) \cong H_*(S^n; \mathbf{Z})$ teljesül, akkor M^n homeomorf az S^n n-dimenziós gömbfelülettel.* ■

1.25. Megjegyzés. Freedman 2.3. Tételének egy speciális esete a fenti állítás $n = 4$ esetén; az $n = 3$ eset pedig éppen a Poincaré-sejtéssel azonos. Vegyük észre, hogy Milnor nevezetes eredménye [17] alapján a tételben szereplő homeomorfizmus nem cserélhető diffeomorfizmusra.

Az általános (tehát nem csak gömbbel homotóp ekvivalens sokaságokat vizsgáló) eset tárgyalásához néhány fogalom (vázlatos) tisztázására van szükségünk. Rögzítsünk tehát egy (zárt, irányított, egyszeresen összefüggő) M n-sokaságot, és vegyük azon (N, f) párok terét, melyekre N egy topologikus (ill. sima) n-sokaság és $f : N \to M$ egy homotóp ekvivalencia. Két ilyen (N_1, f_1), (N_2, f_2) párt ekvivalensnek mondunk, ha létezik egy olyan $g : N_1 \to N_2$ homeomorfizmus (ill. diffeomorfizmus), melyre f_1 homotóp $f_2 \circ g$-vel. Az ekvivalencia-osztályok $\mathfrak{S}t_{\mathrm{top}}$ (ill. $\mathfrak{S}t_{\mathrm{diff}}$) terét *homotóp topologikus struktúráknak* (illetve *homotóp sima struktúráknak*) nevezzük. Hasonlóan, egy M topologikus n-sokaságra vehető azon (N, f) párok tere, melyekre N sima sokaság és $f : N \to M$ egy homeomorfizmus. (Az (N_1, f_1) és (N_2, f_2) párok ekvivalensek, ha létezik olyan $g : N_1 \to N_2$ diffeomorfizmus, melyre f_1 és $f_2 \circ g$ topologikusan izotópak.) Az ekvivalencia-osztályok $Sm(M)$ terét M *simításainak* hívjuk.

Egy (topologikus vagy sima) N n-sokaságra annak *racionális Pontrjagin-osztálya*, $L(N) \in H^*(N; \mathbf{Q})$ definiálható. (Ezek a kohomológia-osztályok a differenciáltopológiából jól ismert megfelelő *karakterisztikus osztályok* általánosításai; ez utóbbiakba nyújt bevezetést [21].) Egy $(N, f) \in \mathfrak{S}t_{\mathrm{top}}(M)$ (ill. $\mathfrak{S}t_{\mathrm{diff}}(M)$) párra vegyük az $(f^*)^{-1}(L(N))L(M)^{-1} \in H^*(M; \mathbf{Q})$ kohomológia elemet. Ilymódon egy $\mathfrak{L}_{\mathrm{top}} : \mathfrak{S}t_{\mathrm{top}}(M) \to H^*(M; \mathbf{Q})$ és egy $\mathfrak{L}_{\mathrm{diff}} : \mathfrak{S}t_{\mathrm{diff}}(M) \to H^*(M; \mathbf{Q})$ függvényt kapunk. A fent ismertetett h-kobordizmus-tétel segítségével igazolható a következő

1.26. Tétel. *Legyen M (zárt, irányított, egyszeresen összefüggő) n-dimenziós sokaság, és tegyük fel, hogy $n \geq 5$. Ekkor minden $x \in H^*(M; \mathbf{Q})$ elemre az $\mathfrak{L}_{\mathrm{top}}^{-1}(x)$ és $\mathfrak{L}_{\mathrm{diff}}^{-1}(x)$ fibrumok, valamint az $Sm(M)$ halmaz végesek.* ■

A tétel szerint tehát $n \geq 5$ esetén M homotópia típusa (amit homotópia- és homológia-csoportjaival határozhatunk meg) valamint egy $H^*(M; \mathbf{Q})$-beli elem – véges sok lehetőség erejéig – meghatározza M topologikus (illetve sima) struktúráját. Továbbá, egy M (zárt, irányított, egyszeresen összefüggő) topologikus n-sokaságon ($n \geq 5$ esetén) véges sok különböző sima struktúra létezhet csak.

1.27. Megjegyzés. $\mathfrak{L}_{\mathrm{top}}$ és $\mathfrak{L}_{\mathrm{diff}}$ képeinek meghatározása, illetve az $\mathfrak{L}_{\mathrm{top}}^{-1}(x)$, $\mathfrak{L}_{\mathrm{diff}}^{-1}(x)$ (és az $Sm(M)$) véges halmazok elemszámainak kiszámítása algebrai topológiai (és számelméleti) eszközöket igénylő feladat. Ismert például, hogy $|Sm(S^6)| = 1$, $|Sm(S^7)| = 28$ stb. Ebben az értelemben mondhatjuk tehát, hogy magas

($n \geq 5$) dimenziós sokaságok osztályozásának elmélete algebrai topológiai eszközöket igénylő, és lényegében megoldott feladat.

Nem nehéz belátni azt, hogy egy zárt (tehát kompakt) topologikus sokaság legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok nem-diffeomorf sima struktúrát hordozhat csak. A fentiek szerint $n \geq 5$-re ez a szám valójában véges ($n \leq 3$-ra pedig 1); mint majd látni fogjuk, léteznek olyan zárt (egyszeresen összefüggő) topologikus 4-sokaságok, melyek megszámlálhatóan végtelen sok sima struktúrát hordoznak. (A nem-kompakt eset még furcsább: a legtöbb nyílt 4-sokaság – köztük a standard euklideszi tér, $\mathbf{R}^4$ is – kontinuum sok különböző sima struktúrával látható el.)

2. Négydimenziós sokaságok

Az előző fejezetbeli előkészítések után most rátérünk a 4-dimenziós eset tárgyalására. Legyen tehát X egy (zárt, irányított, egyszeresen összefüggő) topologikus 4-sokaság. A $Q_X : H^2(X;\mathbf{Z}) \times H^2(X;\mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$, $Q_X(a,b) = \langle a \cup b, [X] \rangle \in \mathbf{Z}$ formulával definiált szimmetrikus bilineáris formát X *metszetformájának* nevezzük.

2.1. Megjegyzés. X simaságát feltételezve Q_X a következő alternatív definícióval adható meg: Poincaré-dualitást alkalmazva kapjuk, hogy $H^2(X;\mathbf{Z}) \cong H_2(X;\mathbf{Z})$; belátható továbbá, hogy minden $\alpha \in H_2(X;\mathbf{Z})$-re létezik egy olyan beágyazott (zárt, irányított) Σ_α 2-sokaság, hogy annak fundamentális osztálya éppen α-val egyenlő. Az $a, b \in H^2(X;\mathbf{Z})$ elemek Poincaré-duálisait α, β-val jelölve mármost belátható az, hogy $Q_X(a,b)$ egyenlő a Σ_α és Σ_β beágyazott részsokaságok algebrai metszetével. Ez az egyenlőség megmagyarázza Q_X elnevezését is.

Poincaré-dualitást alkalmazva könnyen belátható, hogy Q_X *unimoduláris*, vagyis tetszőleges bázisban felírva mátrixának determinánsa ± 1. Vegyük észre, hogy (mivel feltettük, hogy X egyszeresen összefüggő) Q_X valójában leírja X kohomológia-gyűrűjét, ilymódon X minden "homotopikus adatát" tárolja. Whitehead következő tétele szerint Q_X meg is határozza X homotópia-típusát:

2.2. Tétel. *Az X_1, X_2 (zárt, irányított, egyszeresen összefüggő) topologikus 4-sokaságok pontosan akkor homotóp ekvivalensek, ha metszetformáik izomorfak.* ∎

Metszetformája alapján egy topologikus 4-sokasághoz 3 alapvető invariánst rendelhetünk. Jelölje $b_2(X)$ a $H^2(X;\mathbf{Z})$ kohomológia-csoport rangját. Ekkor X egyszeres összefüggősége miatt X *Euler-karakterisztikája*, $\chi(X)$ egyenlő $b_2(X)+2$-vel. (A $b_2(X)$ második Betti-számot Q_X rangjának is szokás hívni, amit $rk(Q_X)$-szel jelölünk.) Q_X fenti definícióját általánosítva a metszetformát terjesszük ki a $H^2(X;\mathbf{R})$ valós vektortérre és diagonalizáljuk ezt a szimmetrikus (valós értékű) bilineáris formát $\mathbf{R}$ felett. A főátlóban álló $+1$-ek számát jelöljük $b_2^+(X)$-szel, a -1-ek számát pedig $b_2^-(X)$-szel. X *szignatúrája* definíció szerint a $\sigma(X) = b_2^+(X) - b_2^-(X)$ különbséggel egyenlő. Végezetül X *páros*, ha minden $a \in H^2(X;\mathbf{Z})$

esetén $Q_X(a,a) \in \mathbf{Z}$ egy páros szám és *páratlan* egyébként. Whitehead fent idézett homotopikus klasszifikációjának topologikus változataként fogható fel Freedman nevezetes eredménye:

2.3. Tétel (Freedman, [6], [7]). *Legyen Q páros, szimmetrikus bilineáris forma. Ekkor (homeomorfizmus erejéig) egyetlen olyan topologikus (zárt, irányított, egyszeresen összefüggő) X 4-sokaság létezik, melyre $Q \cong Q_X$. Páratlan Q esetén pontosan két, egymással nem homeomorf olyan topologikus 4-sokaság létezik, melynek metszetformája az adott Q-val egyenlő. (E két sokaság közül legfeljebb az egyik látható el sima struktúrával.)* ■

A tétel (meglehetősen bonyolult) bizonyítása azon az észrevételen alapul, hogy bár a Whitney-trükk csak $n \geq 5$-re végezhető el simán, topologikus izotópiát megengedve már $n = 4$-re is igaz lesz. (Erről még a 4. fejezetben szó lesz.) Ilymódon a topologikus (egyszeresen összefüggő) 4-sokaságok elmélete (a magasabb dimenzióban tapasztaltakhoz hasonlóan) a metszetforma – vagyis a sokaság egy homotopikus invariánsa – megértésére redukálódik.

2.4. Megjegyzés. Freedman fenti tételének bizonyítása a következő, Walltól származó eredményen alapszik: Két sima (zárt, egyszeresen összefüggő) 4-sokaság pontosan akkor h-kobordáns, ha metszetformáik izomorfak. (Az már korábban ismert volt, hogy két sima zárt 4-sokaság pontosan akkor kobordáns, ha szignatúrájuk megegyezik.) Mivel a h-kobordizmus-tétel bizonyításának – a Whitney-trükköt leszámítva – minden lépése alkalmazható $n = 4$ esetén is, a Whitney-trükk topologikus bizonyítása $n = 4$-re azt adja, hogy izomorf metszetformájú sima 4-sokaságok homeomorfak. X simasága helyett $X - \{\text{egy pont}\}$ simaságát feltételezve Freedman végigvitte a fent vázolt programot, majd (Quinn egy eredményét alkalmazva) belátta, hogy minden X topologikus 4-sokaságra teljesül az, hogy $X - \{\text{egy pont}\}$ sima. Végül (a fogantyú ragasztás korábban ismertetett módszerét alkalmazva) megfelelő topologikus 4-sokaságokat konstruálva fejezte be fent ismertetett tételének bizonyítását.

Klasszikus algebrai eredmények szerint egy *indefinit* formát rk rangja, σ szignatúrája és paritása már meghatározza. Pontosabban: egy Q páratlan, indefinit forma alkalmas bázisban az $n\langle 1\rangle \oplus m\langle -1\rangle$ diagonális mátrixszal adható meg (itt $n = \frac{rk(Q)+\sigma(Q)}{2}$ és $m = \frac{rk(Q)-\sigma(Q)}{2}$). Egy páros, indefinit Q forma pedig alkalmas bázisban $aE_8 \oplus bH$-val írható le; itt $a = \frac{\sigma(Q)}{8}$, $b = \frac{rk(Q)-|\sigma(Q)|}{2}$ továbbá $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ és

$$E_8 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(A definit formák osztályozása nem ilyen elegáns, az idevonatkozó eredményekről lásd [20]-at.) Donaldson nevezetes tétele alapján azonban *sima* 4-sokaság metszetformája csak akkor lehet definit, ha az diagonalizálható, pontosabban:

2.5. Tétel (Donaldson, [1]). *Ha egy X egyszeresen összefüggő (zárt, irányított) sima 4-sokaság Q_X metszetformája negatív (vagy pozitív) definit, akkor ez az $n\langle -1\rangle$ (illetve az $n\langle 1\rangle$) diagonális mátrixszal reprezentálható.* ∎

Összefoglalva tehát, egy egyszeresen összefüggő topologikus 4-sokaságot annak metszetformája (a 2.3. Tételben leírt értelemben) lényegében meghatározza. Donaldson fenti tétele szerint egy adott topologikus 4-sokaság csak akkor hordozhat sima struktúrát, ha metszetformája indefinit, vagy ha definit és diagonális. (Például az E_8 vagy $2E_8$ páros, negatív definit metszetformák által meghatározott topologikus 4-sokaságok nem láthatók el sima struktúrával.) A fent leírt lehetőségekben a formát meghatározza annak rangja, szignatúrája és paritása. Nem minden indefinit bilineáris forma állítható elő azonban sima sokaság metszetformájaként:

2.6. Tétel (Rohlin, [26]). *Ha X egy egyszeresen összefüggő sima sokaság páros metszetformával (vagyis $Q_X = kE_8 \oplus lH$), akkor X szignatúrája 16-tal osztható, vagyis a fenti felírásban k páros.* ∎

2.7. Tétel (Furuta, [9]). *Egy X egyszeresen összefüggő sima, $Q_X = 2kE_8 \oplus lH$ páros metszetformájú 4-sokaságra $l \geq 2|k| + 1$.* ∎

Mint azt rövidesen látni fogjuk, minden páratlan indefinit (továbbá minden, Donaldson 2.5. Tétele által megengedett definit) metszetformához tartozó topologikus sokaság hordoz sima struktúrát. A példák azt is mutatni fogják, hogy $l \geq 3|k|$ esetén a $2kE_8 \oplus lH$ formához tartozó (egyszeresen összefüggő) topologikus 4-sokaság is ellátható sima struktúrával. Összefoglalva tehát a 2.3. Tétel az egyszeresen összefüggő topologikus 4-sokaságok felsorolását egy algebrai problémára (metszetformák osztályozására) vezeti vissza, annak eldöntése pedig, hogy egy adott (egyszeresen összefüggő) topologikus 4-sokaság hordoz-e sima struktúrát, a fenti tételek és a következő fejezet példái alapján (a $Q = 2kE_8 \oplus lH$, $2|k| + 1 < l < 3|k|$ eseteket leszámítva) könnyen eldönthető feladat.

2.8. Megjegyzés. Az ún. $\frac{11}{8}$-*sejtés* értelmében a 2.7. Tételben valójában $l \geq 3|k|$ lenne a helyes következtetés[1] – így a sima struktúra létezésére vonatkozó kérdés teljes választ nyerne az egyszeresen összefüggő esetben. Ez a sejtés azonban még nyitott.

3. Sima 4-sokaságok

3.1. Példák. A legegyszerűbb példát (zárt, irányított) 4-sokaságra az S^4 gömbfelület adja. Könnyen látható, hogy a Q_{S^4} metszetforma (mely a $H^2(S^4;\mathbf{Z}) = 0$ csoporton van definiálva) az $\emptyset$ formával egyenlő. További példákat kapunk alacsonyabb dimenziós sokaságok összeszorzásával; így adódik az $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 = T^4$ 4-dimenziós tórusz, $\Sigma_g \times \Sigma_h$ (mint két Riemann-felület szorzata) és $S^1 \times M$ egy tetszőleges (zárt, irányított) M 3-sokaságra. Könnyen látható, hogy ezen sokaságok közül egyedül az $S^2 \times S^2$ szorzat egyszeresen összefüggő; ennek $Q_{S^2 \times S^2}$ metszetformája (alkalmas bázisban) a $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixszal reprezentálható. Egy további példát ad a $\mathbf{CP}^2$ *komplex projektív sík,* melyet $\mathbf{C}^3 - \{0\}$-ból állíthatunk elő a koordinátánkénti $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$ hatás faktoraként. (Ebből a szempontból $\mathbf{CP}^2$ az $S^2 = \mathbf{CP}^1 = \left(\mathbf{C}^2 - \{0\}\right)/\mathbf{C}^*$ projektív egyenes 4-dimenziós változataként is felfogható.) Nem túl nehéz belátni azt, hogy $H_2(\mathbf{CP}^2;\mathbf{Z})$-t a komplex projektív sík egy projektív egyenese generálja, így $H_2(\mathbf{CP}^2;\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ és $Q_{\mathbf{CP}^2} = \langle 1 \rangle$ (hiszen két különböző egyenes egymást egy pontban metszi). Vegyük észre, hogy $\mathbf{CP}^2$ valójában egy komplex sokaság (sőt, komplex algebrai struktúrával is ellátható). Mint ilyen, természetes irányítást hordoz – ez a komplex érintőtér egy $\{v_1, v_2\}$ komplex bázisát a $\{v_1, iv_1, v_2, iv_2\}$ valós bázissá kiegészítve kapható meg. $\mathbf{CP}^2$-t a fentivel ellentétes irányítással ellátva a $\overline{\mathbf{CP}}^2$ sokaság adódik. Egyszerűen látható, hogy $\pi_1(\mathbf{CP}^2) = 1$ (és természetesen $\pi_1(\overline{\mathbf{CP}}^2) = 1$), illetve hogy $Q_{\overline{\mathbf{CP}}^2} = \langle -1 \rangle$. Valamivel nehezebb annak igazolása, hogy az

$$S_4 = \left\{ [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbf{CP}^3 \,\middle|\, \sum_{i=0}^{3} z_i^4 = 0 \right\} \subset \mathbf{CP}^3$$

definícióval megadott komplex (sőt komplex algebrai) 4-sokaság – melyet $K3$-felületnek is szokás nevezni – egyszeresen összefüggő és $Q_{S_4} = 2E_8 \oplus 3H$ (lásd [13]). Egyszerűen bizonyítható azonban a következő

3.1. Lemma. *Legyenek az X_1, X_2 (zárt, irányított) 4-sokaságok metszetformái Q_{X_1} és Q_{X_2}. Ekkor az $X_1 \# X_2$ összefüggő összeg metszetformája $Q_{X_1} \oplus Q_{X_2}$-vel egyenlő.* ■

---

[1] Ezt a sejtést azért nevezik $\frac{11}{8}$-sejtésnek, mert ekvivalens avval, hogy a fenti tulajdonságú X sokaság $b_2(X)$ Betti-számára és $\sigma(X)$ szignatúrájára fennáll a $b_2(X) \geq \frac{11}{8}|\sigma(X)|$ egyenlőtlenség.

Ilymódon tetszőleges, Donaldson tétele alapján szóbajövő, páratlan bilineáris forma (mely így az $n\langle 1\rangle \oplus m\langle -1\rangle$ formával ekvivalens) előáll mint az $\#n\mathbf{CP}^2$ $\#m\overline{\mathbf{CP}}^2$ (többszörös) összefüggő összeg metszetformája. Hasonlóan, a $\#kS_4\#(l-3k)S^2\times S^2$ sokaságok minden, a 2.5., 2.6. Tételek és a $\frac{11}{8}$-sejtés által megengedett bilineáris formát előállítanak sima (egyszeresen összefüggő, zárt, irányított) 4-sokaság metszetformájaként. Következésképp a sima struktúra létezésének kérdése – az egyszeresen összefüggő esetben, és a 2.7. Tétel valamint a $\frac{11}{8}$-sejtés közti különbségtől eltekintve – lényegében meg lett válaszolva. A továbbiakban tehát arra a kérdésre összpontosítunk majd, hogy egy topologikus 4-sokaságon hány nem-diffeomorf sima struktúra létezhet.

3.2. Sima invariánsok. A különböző konstrukciókkal megadott sokaságok között azok *invariánsaival* tehetünk különbséget. Mint ismeretes, a homotópia- és homológia-csoportok (és hasonlóan a kohomológia-csoportok vagy a metszetforma) *homotopikus* invariánsok, vagyis homotóp sokaságokra ezek az invariánsok azonosak. Mint láttuk (legalábbis az egyszeresen összefüggő esetben) ezek az invariánsok 4-dimenzióban meghatározzák a sokaság topologikus struktúráját – tehát *teljes (topologikus) invariánsrendszert* alkotnak. Mivel homeomorf sima 4-sokaságok h-kobordánsak – a magasabb dimenziókban tapasztaltakat alapul véve – azt várnánk, hogy a h-kobordizmus diffeomorfizmust eredményez, vagyis hogy egy topologikus 4-sokaság legfeljebb egy módon látható el sima struktúrával. Ez azonban távolról sem igaz. A homeomorf, de esetleg nem diffeomorf sokaságok megkülönböztetéséhez *sima invariánsok* bevezetésére van szükségünk.

3.2. Megjegyzés. Az első mérce-elméleti (gauge-elméleti) invariánsok definíciója és alapvető tulajdonságainak belátása Donaldson nevéhez fűződik [1], [3]. Egy bizonyos, a sokaságon rögzített metrikától függő differenciálegyenlet – az ún. *Yang–Mills* vagy *anti-öndualitási* egyenlet – megoldásainak számáról látta be Donaldson, hogy (néhány jól megértett esetet kivéve) az a választott metrikától nem, csak a sokaság sima struktúrájától függ, így sima invariáns. (Ugyanennek a differenciálegyenletnek a megoldásterét vizsgálva kapta meg Donaldson nevezetes, 2.5. Tételben korábban már idézett eredményét.) Ezeket a *Donaldson-polinomokat* váltották fel 1994-ben a hasonló elvek alapján definiált, de egyszerűbben számolható és így sokkal hatékonyabb Seiberg–Witten-invariánsok [33], [23]. A továbbiakban mi ez utóbbi invariánsokat fogjuk – nagyon vázlatosan – bemutatni. (A szigorú definícióhoz olyan differenciálgeometriai alapfogalmak, mint spin és spin^c struktúrák, Dirac-operátorok tárgyalása lenne szükséges, melyekre ehelyt a rövidség kedvéért csak utalni fogunk.)

Minden sima sokaság ellátható valamilyen Riemann-metrikával – a sokaság érintőterén értelmezett pozitív definit skaláris szorzással. (Bizonyos speciális – pl. hiperbolikus vagy pozitív skalárgörbületű – metrika létezésének általában fontos topológiai következményei is vannak.) Sok esetben hasznos azonban egy további, nem minden sokaságon létező struktúra létezését feltételezni. Egy sokaság *spin struktúrával* látható el (vagy röviden *spin sokaság*), ha áttérési függvényeinek deriváltjaiból konzisztens módon "négyzetgyököt lehet vonni". (Minden 4-sokaságnak – ha ő maga nem spin – létezik egy olyan kétrétű elágazó fedése, melyre már az áttérési függvények deriváltjából négyzetgyök vonható, tehát spin. A helyzet hasonló ahhoz, ahogy a $\sqrt{z}$ függvény a $\mathbf{C}$ komplex síkon nem, csak saját Riemann-felületén értelmezhető egyértelműen.) Egy X sokaságon értelmezhető spin struktúrák $\mathfrak{S}(X)$ tere – amennyiben nem üres – a $H^1(X;\mathbf{Z}_2)$ kohomológiacsoporttal paraméterezhető, mégpedig nem természetes módon: $\mathfrak{S}(X)$ valójában egy $H^1(X;\mathbf{Z}_2)$ feletti affin struktúrával látható el. Egy egyszeresen összefüggő 4-sokaságon például pontosan akkor létezik spin struktúra, ha metszetformája páros. (Spin struktúrák részletes tárgyalása megtalálható pl. [15] vagy [13] könyvekben.) Rohlin korábban idézett 2.6. Tétele például a nem egyszeresen összefüggő esetre is általánosítható, a metszetforma paritása helyett egy spin struktúra meglétét követelve meg. A spin struktúra komplex általánosításaként kapjuk a spin^c *struktúra* fogalmát (lásd [23] vagy [24]-ben).

3.3. Tétel. *Minden irányítható 4-sokaságon létezik* spin^c *struktúra. Az X sokaságon megadható* spin^c *struktúrák $\mathfrak{S}^c(X)$ tere a $H^2(X;\mathbf{Z})$ kohomológiacsoporttal paraméterezhető (nem természetes módon) – pontosabban, $\mathfrak{S}^c(X)$ a $H^2(X;\mathbf{Z})$ csoport feletti affin struktúrával látható el.* ■

Egy X 4-dimenziós Riemann-sokaságon rögzített $\mathfrak{s}$ spin^c struktúra segítségével egy, a metrikától függő differenciáloperátor, az ún. *Seiberg–Witten-operátor,* $\mathfrak{S}W$ adható meg. (Az operátor definíciója ismét hosszas előkészítést – konnexiók, kovariáns deriválások ill. (csavart) Dirac-operátorok elméletének ismertetését – igényel, így erre ehelyt nem térünk ki. Az érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk [23], [13] (illetve a magyar nyelvű [28]) munkákat.) Az $\mathfrak{S}W$ Seiberg–Witten-operátor megoldástere (vagyis $\mathfrak{S}W^{-1}(0)$) vagy üres vagy egy végtelen dimenziós tér. Ez utóbbi jelenség abból fakad, hogy az operátor szimmetria-csoporja (vagyis az értelmezési tartományul szolgáló függvénytér automorfizmus-csoportjának azon részcsoportja, melyre nézve $\mathfrak{S}W$ invariáns) végtelen dimenziós Lie-csoport. (Ezt a csoportot szokás *mérce-* avagy *gauge-csoportnak* nevezni, és innen kapta az elmélet is a nevét.) A megoldások terének ezen csoporttal vett faktora azonban már egy véges dimenziós (kompakt, irányítható) $\mathfrak{M}_X(\mathfrak{s})$ sokaság lesz, melyet az X sokaság ($\mathfrak{s}$ spin^c struktúrához tartozó) *Seiberg–Witten-modulusterének* nevezünk. $\mathfrak{M}_X(\mathfrak{s})$ természetes módon ágyazható be egy végtelen dimenziós $\mathfrak{B}_X(\mathfrak{s})$ sokaságba (melyet *konfigurációs térnek* szokás nevezni). Amennyiben X egyszeresen összefüggő, úgy $\mathfrak{B}_X(\mathfrak{s})$-ről belátható, hogy a $\mathbf{CP}^\infty$ végtelen dimenziós projektív térrel homotóp ekvivalens. Ilymódon $\dim\mathfrak{M}_X(\mathfrak{s}) = d$ esetén az $[\mathfrak{M}_X(\mathfrak{s})]$ fundamentális osztály $H_d(\mathbf{CP}^\infty;\mathbf{Z})$ egy elemét reprezentálja. Könnyen belátható, hogy $H_d(\mathbf{CP}^\infty;\mathbf{Z})$ páros d-re $\mathbf{Z}$-vel, páratlan d-re 0-val izomorf, d paritása pedig pusztán $b_2^+(X)$ paritásától függ. Ilymódon az X sokaság *Seiberg–Witten-invariánsa* az $\mathfrak{s}$ spin^c struktúrán $[\mathfrak{M}_X(\mathfrak{s})] \in \mathbf{Z}$ (ill. páratlan d-re 0) értékekkel definiálható. Végeredményül tehát egy

$$SW_X : \mathfrak{S}^c(X) \to \mathbf{Z}$$

függvényt, X *Seiberg–Witten-függvényét* kapjuk. Mind a spin^c struktúra definíciója, mind az $\mathfrak{S}W$ operátor megadása egy Riemann-metrika jelenlétét feltételezi. A kapott $SW_X(\mathfrak{s})$ értékről belátható azonban, hogy $b_2^+(X) > 1$ esetén az csak X sima struktúrájától függ (tehát a metrikától független), vagyis

3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $b_2^+(X_1) = b_2^+(X_2) > 1$. *Ha* $f : X_1 \to X_2$ *egy diffeomorfizmus, akkor az természetes módon egy* $f^* : \mathfrak{S}^c(X_2) \to \mathfrak{S}^c(X_1)$ *azonosítást ad meg, melyre*

$$SW_{X_2}(\mathfrak{s}) = \pm SW_{X_1}\big(f^*(\mathfrak{s})\big)$$

teljesül minden $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}^c(X_2)$*-re. Tehát az* SW_X *Seiberg–Witten-függvény (előjelétől eltekintve)* $b_2^+(X) > 1$ *esetén egy sima invariáns.* ■

3.5. Megjegyzés. A fent vázolt sima invariánsok csak 4-dimenziós sokaságokra definiálhatók. Ennek oka abban rejlik, hogy a – fent nem részletezett, és mind a Donaldson-polinom mind a Seiberg–Witten-invariáns definíciójában központi szerepet játszó – anti-öndualitási operátor csak ebben a dimenzióban definiálható. Ennek okaként pedig azt lehet felhozni, hogy csak 4-dimenzióban fordul elő az, hogy a standard n-dimenziós eulideszi tér $SO(n)$ szimmetria-csoporja két részre hasad, értelmet adva így egy öndualitási és egy anti-öndualitási operátornak. Az $SO(n)$ Lie-csoport minden $n \neq 4$ esetén egyszerű, $n = 4$-re azonban, legalábbis az univerzális fedések – vagy Lie-algebrák – szintjén $SO(3) \times SO(3)$ szorzatra bomlik, és a két komponensre vetítés adja (természetesen meglehetősen komplikált definíciók és tételek sorának ismeretében) az öndualitási és anti-öndualitási operátorokat. Bővebben erről lásd [5] vagy [23] munkákat.

3.3. Szimplektikus 4-sokaságok. Sima invariánsokat egyszerűen definiálhatunk – pl. rendeljük minden sima 4-sokasághoz a 17-es számot. Olyan invariáns találása azonban, mely információt hordoz az adott sokaság sima struktúrájáról, már nehéz feladat. A fent vázlatosan ismertetett Seiberg–Witten-invariáns két alapvető fontosságú tulajdonságát foglalja össze a következő tétel. Ennek ismertetéséhez azonban tisztáznunk kell a szimplektikus sokaság fogalmát.

3.6. Definíció. Az X 4-sokaságon egy ω differenciálható 2-formát *szimplektikus struktúrának* nevezünk, ha ω zárt ($d\omega = 0$) és nem-elfajuló ($\omega \wedge \omega \neq 0$). Az X 4-sokaságot szimplektikusnak nevezzük, ha létezik rajta szimplektikus struktúra.

3.7. Tétel.

1. (Eltűnési tétel) *Ha* X *előáll úgy* $X = X_1 \# X_2$ *összefüggő összegként, hogy* $b_2^+(X_i) > 0$ $(i = 1, 2)$*, akkor minden* $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}^c(X)$ spin^c *struktúrára* $SW_X(\mathfrak{s}) = 0$.

2. (Nem-eltűnési tétel) *Ha X-en létezik szimplektikus struktúra, akkor létezik olyan $\mathfrak{s}_0 \in \mathfrak{S}^c(X)$ spin^c struktúra, melyre $SW_X(\mathfrak{s}_0) = \pm 1$.*

3.8. Megjegyzés. Egy ω szimplektikus struktúra természetesen jelöl ki egy spin^c struktúrát; a fenti nem-eltűnési tételben szereplő $\mathfrak{s}_0$ spin^c struktúra éppen a (feltétel szerint létező) szimplektikus struktúra által kijelölt struktúrának választható. Ezt a spin^c struktúrát a $0 \in H^2(X;\mathbf{Z})$ elemnek megfeleltetve ilymódon egy szimplektikus struktúra egyben egy $\mathfrak{S}^c(X) \sim H^2(X;\mathbf{Z})$ azonosítást is megad. Megjegyzendő, hogy a komplex 4-dimenziós sokaságok osztályozása alapján ismert, hogy minden komplex (egyszeresen összefüggő) 4-sokaság ellátható szimplektikus struktúrával.

Egy (részben a fenti tétel átal sugallt) sejtés szerint minden X egyszeresen összefüggő sima 4-sokaság szimplektikus sokaságok összefüggő összegeként állt volna elő – hasonlóan a 3-dimenzióban érvényes 1.11. Tétel által mutatott képhez. A sejtésre ellenpéldát Szabó [30] talált; ezt követően Fintushel és Stern adott egy általánosabb (a fenti sejtésre további ellenpéldákat szolgáltató) konstrukciót [4]. A megjegyzés után ez utóbbi konstrukciót ismertetjük.

3.9. Megjegyzés. A 3-dimenziós esethez hasonlóan, a 4-dimenziós sokaságok elméletében is centrális probléma az *irreducibilis* sokaságok megtalálása. (X-et irreducibilisnek nevezzük, ha minden $X = X_1 \# X_2$ összefüggő összegre bontásban X_1 vagy X_2 az S^4 gömbfelülettel homeomorf.) Hosszú ideig úgy tűnt, hogy egy irreducibilis (egyszeresen összefüggő, S^4-től különböző) 4-sokaság komplex struktúrával látható el. Az első ellenpéldák [12] megtalálása után a komplex struktúra szerepét a szimplektikus struktúra vette át. Szabó (majd Fintushel és Stern) ellenpéldái irreducibilis, de szimplektikus struktúrát nem hordozó (a 3.7. Tétel 2. pontját nem teljesítő) sokaságok voltak. Pillanatnyilag egy sokaság irreducibilitására nem ismert ekvivalens, a sokaság geometriája alapján megfogalmazható feltétel. Itt jegyezzük meg, hogy bár könnyen látható módon minden 4-sokaság felbontható irreducibilisek összefüggő összegére, ez a felírás távolról sem egyértelmű – ellentétben a 3-dimenziós esettel. Az $X = S^2 \times S^2 \# \overline{\mathbf{CP}}^2$ összefüggő összegről nem nehéz megmutatni, hogy $\mathbf{CP}^2 \# 2\overline{\mathbf{CP}}^2$-vel diffeomorf, így tehát X-nek két lényegesen különböző irreducibilis faktorokra bontása létezik. (Irreducibilis 4-sokaságokról ld. még [29]-et.)

Legyen tehát X egyszeresen összefüggő (zárt, irányított) 4-sokaság és $T^2 \subset X$ beágyazott tórusz, melyre $Q_X([T^2],[T^2]) = 0$ (de $[T^2]$ a $H_2(X;\mathbf{Z})$ homológiacsoportban nem-nulla). Ekkor $X - \nu T^2$ egy $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ peremű sokaság lesz (itt νT^2 a tórusz nyílt csőszerű környezetét jelöli). Legyen továbbá $K \subset S^3$ egy adott csomó, és vegyük a (szintén T^3 peremű) $Y_K = S^1 \times (S^3 - \nu K)$ peremes 4-sokaságot. $X - \nu T^2$ és Y_K határaik mentén való összeragasztásával egy X_K (zárt, irányítható) 4-sokaságot kapunk, mely alkalmas $T^2 \hookrightarrow X$ beágyazást választva X-szel lesz homeomorf.

3.10. Tétel (Fintushel és Stern, [4]). *Legyen X egyszeresen összefüggő (zárt, irányított) szimplektikus 4-sokaság, $T^2 \subset X$ alkalmas beágyazott tórusz, $K \subset S^3$*

pedig olyan csomó, melynek Alexander-polinomjában a főegyüttható $\neq \pm 1$. Ekkor X_K nem írható fel szimplektikus sokaságok összefüggő összegeként. ∎

A következő sejtés pedig azt mutatja, hogy egy adott topologikus sokaságon az összes sima struktúra feltérképezése legalább olyan nehéz feladat, mint az S^3-beli csomók osztályozása. (Ez utóbbi pedig a matematika egyik legnagyobb múltra visszatekintő, és látványos fejlődése ellenére kevéssé értett fejezete.) A sejtés ismertetése előtt megadjuk azt az eredményt, melyre a sejtés is támaszkodik.

3.11. Tétel ([4]). *Legyen X szimplektikus 4-sokaság, $T^2 \subset X$ alkalmas beágyazott tórusz, K_1 és K_2 pedig két olyan S^3-beli csomó, melyek Alexander-polinomja különbözik. Ekkor az X_{K_1} és X_{K_2} egymással (és X-szel) homeomorf 4-sokaságok nem diffeomorfak.* ∎

3.12. Sejtés. *Egy fenti X szimplektikus 4-sokaságra és K_1, K_2 csomókra X_{K_1} és X_{K_2} pontosan akkor diffeomorfak, ha a K_1 és K_2 csomók S^3-ban ekvivalensek (izotópak).*

Fintushel és Stern a fenti tételeket X_K Seiberg–Witten-invariánsainak kiszámításával látta be – bebizonyították, hogy SW_X és K Alexander-polinomja egyértelműen megadják SW_{X_K}-t. További operációk (pl. logaritmikus transzformáció) alkalmazásával X-ből olyan (vele homeomorf) 4-sokaság állítható elő, mely semelyik fenti X_K-val sem diffeomorf, így a 3.12. Sejtés igaz volta esetén azt találjuk, hogy bizonyos (enyhe) feltételeknek eleget tevő (vagyis megfelelő tóruszt tartalmazó, szimplektikus) 4-sokaságokra a sima struktúrák feltérképezése nehezebb feladat, mint S^3-ban a csomók osztályozása.

3.13. Megjegyzés. A fenti tételek bizonyítása az ún. "vágj és ragassz" módszerrel történt. Ez a módszer akkor alkalmazható, ha egy 4-sokaságot olyan részekből rakunk össze, melyekre a $\mathfrak{S}W$ operátor megoldásai (többé-kevésbé) jól leírhatók. Ekkor a különböző részeken kapott megoldásokat az egész sokaságon lévő megoldássá próbáljuk összeragasztani, majd megvizsgáljuk, hogy vajon ilymódon előállítottunk-e minden megoldást. A részsokaságokon pedig úgy próbáljuk a megoldásteret megkapni, hogy a részeket valamely jólismert sokaságba ágyazva a fenti eljárás megfordításával, a megoldások kivágásával próbálkozunk. Ilymódon (szerencsés esetben) az invariánsok számítása (a Mayer–Vietoris-tételben megismert séma szerinti) egyszerű algebrára redukálható. A módszer alkalmazhatósága azonban nagyban függ a konstrukcióban szereplő részek illetve azok 3-dimenziós határainak topológiájától.

A 3.11. Tételből könnyen bizonyítható például a következő

3.14. Tétel. *A $2kE_8 \oplus (4k-1)H$ ($k \in \mathbf{N}$) és a $(2n-1)\langle 1\rangle \oplus m\langle -1\rangle$ ($n \geq 2, m \geq 10n-1$) formákhoz tartozó egyszeresen összefüggő (zárt, irányítható) topologikus 4-sokaságok végtelen sok nem-diffeomorf sima struktúrát hordoznak.* ∎

Amennyiben X egy szimplektikus 4-sokaság, a beágyazott T^2 tórusz szimplektikus részsokaság és $K \subset S^3$ *fibrált csomó* (vagyis létezik egy $f : S^3 - K \to S^1$ fibrálás), úgy X_K is ellátható szimplektikus struktúrával. Tehát az X-szel homeomorf szimplektikus 4-sokaságok (valószínűleg) az S^3-beli fibrált csomók elméleténél összetettebbek. Egy más megközelítés azonban némi reményt nyújt szimplektikus 4-sokaságok megértésére. Legyen először $X \subset \mathbf{CP}^n$ egy ún. *projektív felület* (vagyis valamely n-re $\mathbf{CP}^n$ egy komplex 2-dimenziós – így valós 4-dimenziós – részsokasága). Legyen továbbá $A \cong \mathbf{CP}^{n-2} \subset \mathbf{CP}^n$ rögzített két komplex kodimenziós altér. Az A-t tartalmazó $\mathbf{CP}^n$-beli hipersíkok (egy komplex kodimenziós alterek) tere könnyen látható módon $\mathbf{CP}^1$-gyel paraméterezhető, és azt sem nehéz megmutatni, hogy minden $x \in X - A$ pontra pontosan egy olyan H_t (a $t \in \mathbf{CP}^1$ paraméter-értékhez tartozó) A-t tartalmazó altér található, melyre $x \in H_t$. Ilymódon egy $f : X - A \to \mathbf{CP}^1$ függvény kapható (legyen $f(x) = t$ azon $t \in \mathbf{CP}^1$-re, melyre $x \in H_t$), mely generikus A-t választva egy ún. *Lefschetz-vonalazás* (vagy komplex Morse-függvény) lesz, vagyis f minden kritikus pontja környezetében (lokálisan) $z_1^2 + z_2^2$ alakú. Az $X \cap A$-beli (véges sok) pontot felfújva (vagyis minden pontot egy-egy $\mathbf{CP}^1$ gömbbel helyettesítve) pedig a fenti f a kapott $\widetilde{X}$ komplex felületre egy $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \mathbf{CP}^1$ *Lefschetz-fibrálássá* (vagyis az egész $\widetilde{X}$ sokaságon értelmezett Lefschetz-vonalazássá) terjeszthető ki. Vegyük észre, hogy $\widetilde{f}$ egy fibruma egy komplex 1-dimenziós zárt sokaság, vagyis valamilyen g-re egy Σ_g Riemann-felület lesz.

3.15. Megjegyzés. Kodaira munkássága nyomán ismert, hogy minden egyszeresen összefüggő X komplex 4-sokaságra meg lehet X komplex struktúráját úgy változtatni, hogy sima struktúrája ne vátozzék, de az eredményül kapott (ún. deformált) X' sokaság már valamely $\mathbf{CP}^n$-be komplex módon beágyazható legyen. Ezekre a deformált sokaságokra pedig a fenti módon Lefschetz-vonalazás, illetve felfújtjukra Lefschetz-fibrálás található.

Kodaira kutatásai alapján (legalábbis az egyszeresen összefüggő esetben) komplex 4-sokaságok topológiája és differenciáltopológiája a sokaságok elméletének egy jól feldolgozott fejezete. Eszerint egy egyszeresen összefüggő komplex 4-sokaság $\mathbf{CP}^2$-vel, $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$-gyel, S_4-gyel, egy elliptikus felülettel, vagy egy általános típusú felülettel (illetve ezek felfújtjaival) azonosítható. (Egy S komplex 4-sokaság *elliptikus felület,* ha létezik egy olyan $f : S \to \mathbf{CP}^1$ holomorf függvény, melynek általános fibruma egy tórusszal diffeomorf. Általános típusú felületek definíciója nagyobb előkészítést igényelne, így ehhez a [8] könyvet ajánljuk az olvasó figyelmébe.) Egy X (egyszeresen összefüggő) elliptikus felületről (mely nem felfújtja más komplex felületnek, tehát *minimális*) ismert, hogy $\sigma(X) = -8n$ és $\chi(X) = 12n$ valamely $n \in \mathbf{N}$ egészre. (Itt $\chi(X)$ az X sokaság Euler-karakterisztikáját jelöli.) Általános típusú felületekre pedig belátható, hogy $3\sigma(X) \leq \chi(X)$ és $0 \leq 5\sigma(X) + 3\chi(X) + 12$ – a 2.3. Tétel értelmében ezek topológiája a $\chi(X)$ és $\sigma(X)$ algebrai topológiai invariánsok által lényegében meghatározott.

A fent vázoltaknál összetettebb analitikus megfontolásokat alkalmazva Donaldson belátta azt, hogy a fenti eredmények minden szimplektikus 4-sokaságra kiterjeszthetők, vagyis

3.16. Tétel (Donaldson, [2]). *Legyen X egy (zárt) szimplektikus 4-sokaság. Ekkor létezik X-nek egy véges $B \subset X$ részhalmaza és annak $X - B$ komplementumán egy olyan $f : X - B \to \mathbf{CP}^1$ függvény, mely Lefschetz-vonalazás. B pontjait felfújva így a kapott $\widetilde{X}$ szimplektikus sokaság Lefschetz-fibrálással látható el.* ■

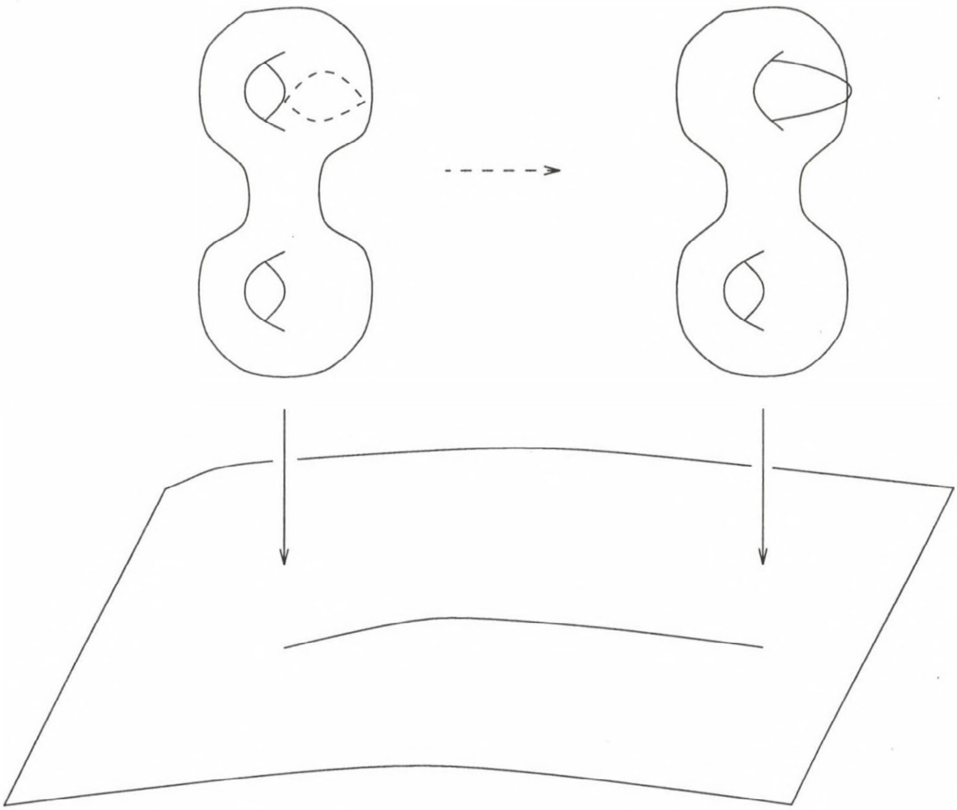
3.17. Megjegyzés. A tétel (Gompf nevéhez fűződő) megfordítása is igaz [11]: néhány (jól megértett) speciális esetet leszámítva egy Lefschetz-vonalazás (illetve Lefschetz-fibrálás) a sokaságot szimplektikus struktúrával látja el. Informálisan egy $f : X \to \mathbf{CP}^1$ Lefschetz-fibrálás a valós (és minden sima sokaságon létező) Morse-függvény fogalmát terjeszti ki a komplex esetre, így tehát szimplektikus struktúra pontosan akkor létezik egy sima 4-sokaságon, ha valamely felfújtján van komplex Morse-függvény.

Egy $f : X \to \mathbf{CP}^1 = S^2$ Lefschetz-fibrálást generikus $f^{-1}(t) \cong \Sigma_g$ fibruma bizonyos köreinek kijelölésével lehet leírni. Ezen körök f kritikus pontjaihoz kapcsolódnak, és általában *eltűnési ciklusoknak* hívják őket. Legyen tehát $t_0 \in S^2$ rögzített reguláris érték, és tegyük fel, hogy f injektív $C = \{p_1, \dots, p_k\}$ kritikus pontjainak halmazán. (Ez a tulajdonság kis perturbálással minden f Lefschetz-fibrálás esetén elérhető.) Egy $t_i = f(p_i)$ kritikus értékhez és $\gamma_i : [0,1] \to S^2$, a t_0 rögzített pontot $f(p_i)$-vel összekötő úthoz a $v_i \subset f^{-1}(t_0)$ egyszerű zárt görbe rendelhető avval a tulajdonsággal, hogy t_0-ból γ_i mentén t_i-be utazva v_i a fibrumban egy pontra húzódik (lásd a 3. ábrát). Az eltűnési ciklusok lehetséges számának illetve elhelyezkedésének vizsgálata Lefschetz-fibrálások – és így szimplektikus 4-sokaságok – jobb megértését tette a közelmúltban lehetővé.

3.18. Példa. Egy $X \to S^2$ Lefschetz-fibrálás $\pi_1(X)$ fundamentális csoporja például a $\pi_1\big(f^{-1}(t_0)\big)/\langle v_1, \dots, v_k\rangle$ faktorral azonosítható.

3.19. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a v_i eltűnési ciklus nemcsak a szinguláris fibrumtól, hanem a választott γ_i úttól is függ. Fel szokás tételezni, hogy a szinguláris fibrumok egy t_0 középpontú egységkör pereme felett helyezkednek el, és a választott γ_i-k éppen ennek a körnek megfelelő sugarai. A szinguláris fibrumok körvonal menti sorrendjének megváltoztatása az eltűnési ciklusok megváltoztatásával jár – ezeket a transzformációkat nem nehéz megérteni, ld. például [13].

A v_i eltűnési ciklus izotópia-osztályát valójában egy hozzá asszociált algebrai invariáns, a v_i-hez rendelt (jobbkezes) *Dehn-csavar* meghatározza. Legyen $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ a fibrálás generikus $f^{-1}(t) = \Sigma$ fibrumának (irányítható) diffeomorfizmuscsoportja, $\mathrm{Diff}_0^+(\Sigma)$ pedig ennek egységkomponense. Az $\mathfrak{M}_g = \mathrm{Diff}^+(\Sigma)/\mathrm{Diff}_0^+(\Sigma)$ faktorcsoportot a Σ Riemann-felület *leképezés-osztály csoportjának* nevezik (itt g a Σ Riemann-felület nemét jelöli). Σ-n egy γ egyszerű zárt görbe (vagyis S^1 egy beágyazása) egy $D(\gamma) \in \mathfrak{M}_g$ elemet definiál a következő módon.



3. ábra. Eltűnési ciklus

3.20. Definíció. A $\gamma \subset \Sigma$ egyszerű zárt görbe által meghatározott $f_\gamma : \Sigma \to \Sigma$ (jobbkezes) Dehn-csavart úgy kapjuk meg, hogy Σ-t γ mentén felvágjuk, majd a keletkező két határkomponenst egy 360°-os (jobbra) forgatás után ismét összeragasztjuk. (Formálisan, a $\nu\gamma \subset \Sigma$ tubuláris környezetet $S^1 \times (0,1)$-gyel azonosítva azon legyen $f_\gamma(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t)$ majd ezt simán identitásként terjesszük ki $\nu\gamma$ komplementumára.) Az f_γ által meghatározott $\mathfrak{M}_g$-beli elemet $D(\gamma)$-val jelöljük.

3.21. Tétel. *Egy $D(\gamma)$ Dehn-csavar izotópia erejéig meghatározza az őt definiáló egyszerű zárt görbét.* ■

Ilymódon tehát az $f : X \to S^2$ Lefschetz-fibrálást a $D(v_1)D(v_2)\cdots D(v_k)$, $\mathfrak{M}_g$-beli szó határozza meg. Vagyis egy Lefschetz-fibrálás (így áttételesen egy szimplektikus 4-sokaság) egy algebai invariánssal – az eltűnési ciklusok által adott Dehn-csavarokból alkotott $\mathfrak{M}_g$-beli szóval – adható meg. $\mathfrak{M}_g$ összetett viselkedése miatt azonban szimplektikus sokaságok ilyen jellegű leírása még kiaknázásra vár.

4. Függelék: Egzotikus $\mathbf{R}^4$-ek

A 4-dimenziós differenciáltopológia talán legmeghökkentőbb eredménye *egzotikus* $\mathbf{R}^4$*-ek* létezésének belátása volt. (Egy X sima sokaságot akkor nevezünk egzotikus $\mathbf{R}^4$-nek, ha homeomorf, de nem diffeomorf a standard 4-dimenziós euklideszi térrel, $\mathbf{R}^4$-gyel.) Ez az eredmény különösen a következő tétel fényében furcsa:

4.1. Tétel. *Legyen X olyan sima n-sokaság mely $\mathbf{R}^n$-nel homeomorf és tegyük fel, hogy $n \neq 4$. Ekkor X és $\mathbf{R}^n$ diffeomorfak.* ∎

Vagyis egzotikus euklideszi terek csak 4-dimenzióban létezhetnek, ott azonban rögtön elég sok található:

4.2. Tétel. *Minden $(s,t) \in \mathbf{R}^2$ paraméter-értékre megkonstruálható egy olyan $X_{s,t}$ egzotikus $\mathbf{R}^4$, hogy $X_{s,t}$ pontosan akkor diffeomorf $X_{s',t'}$-vel ha $(s,t) = (s',t')$.*
∎

Az első egzotikus $\mathbf{R}^4$ létezésének belátásához (Casson egy korábbi ötlete nyomán) Freedman és Donaldson korábban tárgyalt eredményeit használták fel. Freedman tétele szerint az S_4 (3.1. pontban definiált) $K3$-felület *topologikusan* felbontható egy olyan $S_4 = X_1 \# X_2$ összefüggő összegre, hogy $Q_{X_1} = 2E_8$ és $Q_{X_2} = 3H$. (Ez következik abból, hogy a fenti tulajdonságú X_1, X_2 topologikus sokaságok a 2.3. Tétel szerint léteznek, és – ismét a 2.3. Tétel szerint – $X_1 \# X_2$ összefüggő összegük az S_4 sokasággal homeomorf.) Az X_1 sokaság azonban Donaldson 2.5. Tétele értelmében nem látható el sima struktúrával, így a fenti (topologikus) összefüggő összegre bontás simán nem hajtható végre. Azon pontok környezetének vizsgálata, melyekben az összefüggő összeg vétetett, vezet el végülis egy egzotikus $\mathbf{R}^4$ létezésének belátásához. Erről az egzotikus $\mathbf{R}^4$-ről belátható például, hogy simán nem ágyazható be a standard euklideszi $\mathbf{R}^4$-be. (A fenti érvelés további részleteiről lásd [5].)

A Donaldson- majd Seiberg–Witten-invariánsok megtalálása egzotikus $\mathbf{R}^4$-ek egy másik fajtájának felfedezéséhez vezetett. Ezen egzotikus $\mathbf{R}^4$-ek a standard 4-dimenziós euklideszi tér nyílt részhalmazaiként is előállíthatók; a továbbiakban ezek konstrukcióját fogjuk (vázlatosan) megadni. Vegyünk tehát két egyszeresen összefüggő, homeomorf, de nem diffeomorf zárt 4-sokaságot, legyenek ezek X_0 és X_1. (Ilyen példát kapunk S_4 és $(S_4)_K$ választással minden olyan K csomóra, melynek Alexander-polinomja $\neq 1$.) Wall korábban (a 2.4. Megjegyzésben) idézett tétele szerint ekkor X_0 és X_1 között létezik egy W h-kobordizmus. Nem túl nehéz belátni azt, hogy W-t az $X_0 \times [0,1]$ 5-sokaságra pusztán 2- és 3-indexű fogantyúk ragasztásával is elő lehet állítani. Ha csak a 2-fogantyúkat ragasztjuk oda $X_0 \times [0,1]$-hez, akkor egy ($X_{\frac{1}{2}}$ felső peremű) W_1 kobordizmust kapunk. Az $X_{\frac{1}{2}}$ 4-sokaságban találhatók meg W 2-fogantyúinak $A_1, \ldots, A_n$ öv- és 3-fogantyúinak $B_1, \ldots, B_n$ ragasztó gömbjei. Mivel W egy h-kobordizmus, (esetleg izotópia alkalmazása után) feltehető, hogy az $A_i \cdot B_j$ algebrai metszési szám δ_{ij}-vel egyenlő. Amennyiben ez az algebrai metszet egyenlővé tehető lenne a geometriaival, úgy a 3.7. Tétel alkalmazhatóvá válna, ami végülis W trivialitását és így egy $X_0 \cong X_1$ diffeomorfizmust eredményezne – ellentétben X_0 és X_1 választásával. Az algebrai és geometriai metszésszám a szokásos (korábban tárgyalt) módon azért nem tehető egyenlővé, mert a Whitney-trükk nem alkalmazható 4-dimenzióban. Az ellentétes előjelű pontpárokat A_i-ben és B_j-ben összekötő görbékből összefűzött hurok ugyan pontrahúzható lesz $X_{\frac{1}{2}} - \cup A_i \cup B_j$-ben (ehhez esetleg izotópiával a gömböket változtatni kell), az így kapott D^2-k azonban nem feltétlenül lesznek beágyazottak, így nem találjuk meg a korábban látott lokális modellt. Dimenzió-okokból feltehető, hogy D^2 képének véges sok (transzverzális) önátmetszése van. Egy ilyen önátmetszést a Whitney-trükk ismételt alkalmazásával próbálhatunk meg eltüntetni: az önátmetszés által definiált hurkot $X_{\frac{1}{2}}$-ben pontrahúzva ismét egy immertált (véges sok transzverzális önátmetszéssel rendelkező) D^2-t kapunk. Ezt a processzust végtelen sokszor elismételve határértékben egy $CH \subset X_{\frac{1}{2}}$ alteret, egy ún. *Casson-fogantyút* kapunk. Véve az összes A_i, B_j gömbök csőszerű környezeteinek illetve az ellentétes előjelű pontpárokhoz tartozó Casson-fogantyúknak az unióját, $X_{\frac{1}{2}}$ egy nyílt U részét kapjuk. U-ból B_j-k menti műtéttel (vagyis $U \times [0,1]$-hez 3-fogantyúk ragasztásával) $V_1 \subset X_1$, míg A_i-k menti műtéttel $V_0 \subset X_0$ nyílt részeket kaphatunk meg. Freedman korábban idézett 2.3. Tételének bizonyításában a központi (és legnehezebb) lépés annak belátása, hogy a fent definiált Casson-fogantyúk a $D^2 \times D^2$ szokásos fogantyúval homeomorfak. (Ilymódon tehát a magasabb dimenziókban megismert műtéti eljárások véghezvihetők.) Ebből adódóan azonban az is látszik, hogy topologikusan a Whitney-trükk véghezvihető, vagyis topologikusan V_i valójában $\mathbf{R}^4$-gyel azonos (tehát homeomorf vele). Könnyen ellenőrizhető az is, hogy $X_0 - V_0$ és $X_1 - V_1$ diffeomorfak, hiszen a W kobordizmust ezekre a peremes sokaságokra megszorítva triviális koborizmust kapunk, mivel minden fogantyú-ragasztás V_0-on belül történt. Ilymódon tehát V_0 és V_1 egy-egy $\mathbf{R}^4$-gyel homeomorf nyílt sokaság. Amennyiben ezek a standard $\mathbf{R}^4$-gyel diffeomorfak lennének, úgy az U részsokaságot $V_0 \times [0,1]$-re cserélve ($V_0 \cong V_1 \cong \mathbf{R}^4$ miatt) X_0 és X_1 között egy triviális kobordizmust, végeredményben tehát egy $X_0 \cong X_1$ diffeomorfizmust kapnánk, ami azonban ellentmond X_0 és X_1 választásának. Evvel tehát beláttuk, hogy a fent megkapott $V_0 \subset X_0$ részsokaság egy egzotikus $\mathbf{R}^4$.

Az ilyen, ún. h-kobordizmusos konstrukcióval talált egzotikus $\mathbf{R}^4$-ekről belátható, hogy a standard eukideszi tér nyílt részhalmazaival diffeomorfak; egy bonyolultabb érvelést alkalmazva valójában kontinuum sok, fenti konstrukcióval adott (tehát a standard $\mathbf{R}^4$-be ágyazható), egymással nem diffeomorf egzotikus $\mathbf{R}^4$ található. (Egzotikus $\mathbf{R}^4$-ek különböző konstrukcióiról és további furcsaságairól a [10] cikkben illetve a [13] könyvben olvashatunk.)

Irodalomjegyzék

[1] S. Donaldson, An application of gauge theory to four dimensional topology, *J. Diff. Geom.*, **18** (1983), 279–315.

[2] S. Donaldson, *Lefschetz fibrations in symplectic geometry,* Proc. Internat. Cong. Math. (Berlin, 1998), Vol II, 309–314.

[3] S. Donaldson and P. Kronheimer, *Geometry of four-manifolds,* Oxford Univ. Press (1990).

[4] R. Fintushel and R. Stern, Knots, links and 4-manifolds, *Invent. Math.*, **134** (1998), 363–400.

[5] D. Freed and K. Uhlenbeck, *Instantons and 4-manifolds,* Springer-Verlag (1984).

[6] M. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, *J. Diff. Geom.*, **17** (1982), 357–453.

[7] M. Freedman and F. Quinn, *Topology of 4-manifolds,* Princeton Mathematical Series **39**, Princeton University Press (1990).

[8] R. Friedman and J. Morgan, *Smooth 4-manifolds and complex surfaces,* Ergeb. Math. Grenzgeb. vol. 27, Springer-Verlag (1994).

[9] M. Furuta, *Monopole equation and the* $\frac{11}{8}$*-conjecture,* preprint.

[10] R. Gompf, An exotic menagerie, *J. Diff. Geom.*, **37** (1993), 199–223.

[11] R. Gompf, *A topological characterization of symplectic manifolds,* előkészületben.

[12] R. Gompf and T. Mrowka, Irreducible 4-manifolds need not be complex, *Ann. Math.*, **138** (1993), 61–111.

[13] R. Gompf and A. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus,* AMS Graduate Studies in Math. vol. 20 (1999).

[14] R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology,* in Geometric Topology (W. Kazez ed.), AMS/IP Stud. Adv. Math. vol. 2.2, Amer. Math. Soc., 1997, pp. 35–473.

[15] B. Lawson and M. Michelson, *Spin geometry,* Princeton Math. Series vol. **39** (1989).

[16] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to symplectic topology,* Oxford University Press (1995).

[17] J. Milnor, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Ann. Math.*, **64** (1956), 399–405.

[18] J. Milnor, *Morse theory,* Ann. Math. Studies **51**, Princeton University Press (1963).

[19] J. Milnor, *Lectures on the h-Cobordism Theorem,* notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press (1965).

[20] J. Milnor and D. Husemoller, *Symmetric bilinear forms,* Springer-Verlag (1973).

[21] J. Milnor and J. Stasheff, *Characteristic classes,* Ann. Math. Studies **76**, Princeton University Press (1974).

[22] E. Moise, Affine structures in 3-manifolds V. The triangulation theorem and Hauptvermutung, *Ann. Math.*, **56** (1952), 96–114.

[23] J. Morgan, *The Seiberg–Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds,* Math. Notes **44**, Princeton University Press (1996).

[24] J. Morgan, *Smooth invariants of 4-manifolds,* in "Low Dimensional Topology (Summer School in Budapest, 1998)" (ed. K. Böröczky, A. Stipsicz and W. Neumann), Bolyai Társulat (1999).

[25] W. Neumann, *Notes on geometry and 3-manifolds,* in "Low Dimensional Topology (Summer School in Budapest, 1998)" (ed. K. Böröczky, A. Stipsicz and W. Neumann), Bolyai Társulat (1999).

[26] V. Rohlin, New results in the theory of four dimensional manifolds, *Dokl. Akad. Nauk. USSR,* **84** (1952), 221–224.

[27] S. Smale, The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **66** (1960), 373–375.

[28] A. Stipsicz, *Négydimenziós topológia,* egyetemi jegyzet (elérhető: `http://www.cs.elte.hu/analysis/stipsicz/hun`).

[29] A. Stipsicz, *Geography of irreducible 4-manifolds,* ECM2 (Budapest, 1996) 221–233, Prog. Math. **169**, Birkhäuser (1998).

[30] Z. Szabó, Simply connected irreducible 4-manifolds with no symplectic structures, *Invent. Math.,* **132** (1998), 457–466.

[31] W. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology, vol. I,* Princeton Math. Series **35**, Princeton University Press (1997).

[32] C. T. C. Wall, On simply-connected 4-manifolds, *J. London Math. Soc.,* **39** (1964), 141–149.

[33] E. Witten, Monopoles and four-manifolds, *Math. Res. Lett.,* **1** (1994), 769–796.

Stipsicz András
ELTE TTK, Analízis Tanszék
e-mail: `stipsicz@cs.elte.hu`

András Stipsicz: Topology of four-dimensional manifolds — an overview

In this note the most recent — and some other, already classical — results of 4-dimensional differential topology are discussed. After the (sketchy) discussion of classification results of manifolds of dimensions $\neq 4$, some classical and gauge theoretic invariants of 4-manifolds are described. After reviewing celebrated results of Freedman and Donaldson, the (very sketchy) definition of Seiberg–Witten invariants is given. The description of the knot construction of Fintushel and Stern, and the discussion of symplectic manifolds (together with Donaldson's fundamental result) is followed by an Appendix, in which we provide a short argument for the existence of exotic 4-dimensional Euclidean spaces — a phenomenon unique to dimension 4.

PUKÁNSZKY LAJOS ÉS A FAKTOROK ELMÉLETE

KOVÁCS ISTVÁN

Ez a cikk ahhoz a méltatáshoz csatlakozik, amely Pukánszky Lajos matematikai munkásságáról a Matematikai Lapok új sorozatának 4. évfolyamában jelent meg J. Dixmier és M. Duflo tollából [1]. Ez a méltatás kitűnő képet ad Pukánszkynak a csoportok ábrázoláselméletében elért eredményeiről. Pukánszky Lajosról mint matematikusról alkotott képünk azonban nem lehet teljes anélkül, hogy bővebben ne beszélnénk az operátoralgebrák elméletére vonatkozó kiemelkedő, az ún. (III) típusú faktorok elméletében elért egyik korai eredményéről, amit Pukánszky még itt Magyarországon nyert, mint a szegedi funkcionálanalízis iskola tagja. Egy olyan magyar eredményről van szó, amelynek Magyarországon nem volt előzménye és sajnos folytatása sem. A tradicionális hazai funkcionálanalízis iskola kiváló képviselőinek az eredményei ugyanis többségükben a Hilbert-tér operátorainak egyedi vizsgálatára vonatkoznak. Pukánszky Lajos ebben az eredményében egy olyan problémát oldott meg, amivel szemben az operátoralgebrák szakemberei 13 éven keresztül tehetetlenül álltak. Bár az eredmény közel ötven éves, úgy gondoljuk, hogy érdemes visszatekinteni rá egy olyan szemszögből, amelynek nyomát sehol sem találjuk az irodalomban. Ez a célja az itteni ismeretterjesztő cikknek.

A cikk felépítése a következő. Az 1. paragrafusban összefoglaljuk azokat az alapvető fogalmakat, definíciókat, tételeket, amelyek elengedhetetlenül szükségesek a dolgozat további részének a megértéséhez. Az olvasó részéről csak annyit tételezünk fel, hogy járatos egy egyetemi funkcionálanalízis kurzus anyagában. A 2. paragrafus Pukánszky eredményének van szentelve. Itt rámutatunk arra, hogy Pukánszky vizsgálatai hogyan kapcsolódnak Robert T. Powers azon eredményéhez, ami Pukánszky fő eredményének egy messzemenő általánosítását képezi. A (III) típusú faktorok elméletének további alakulására – s itt főleg ezen faktorok Connes-féle osztályozására gondolunk – a cikkben nem térünk ki.

1. A faktorok elméletének elemei

A következőkben H egy szeparábilis komplex Hilbert-teret jelöl. Legyen $\mathbf{B}(\mathrm{H})$ a H Hilbert-tér korlátos operátorainak a halmaza.

1. Definíció. $\mathbf{B}(\mathrm{H})$ egy olyan $\mathbf{A}$ részhalmazát, amelyik bármely két elemével együtt azok lineáris kombinációit, szorzatát, valamint minden T elemével együtt annak T^* adjungáltját is tartalmazza, *önadjungált operátoralgebrának* nevezzük. $\mathbf{A}$-t *egységelemesnek* hívjuk, ha tartalmazza a H Hilbert-tér egységoperátorát, amit a szokásos konvenciónak megfelelően I-vel jelölünk.

$\mathbf{B}(\mathrm{H})$ egy tetszőleges $\mathbf{M}$ részhalmaza esetén jelöljük $\mathbf{M}'$-vel az $\mathbf{M}$ halmaz algebrai *kommutánsát:* $\mathbf{M}' = \{S \in \mathbf{B}(\mathrm{H}) : ST = TS \text{ minden } T \in \mathbf{M}\text{-re}\}$. $\mathbf{M}$ bikommutánsán akkor az $\mathbf{M}'' = (\mathbf{M}')'$ operátorhalmazt értjük.

2. Definíció. Azokat az $\mathbf{A}$ egységelemes önadjungált operátoralgebrákat, amelyek kielégítik az $\mathbf{A}'' = \mathbf{A}$ *bikommutációs* feltételt, a ma használatos terminológiának megfelelően *von Neumann-algebráknak* nevezzük.

A fenti definíció a von Neumann-algebrákat az önadjungált operátoralgebrák közül egy tisztán algebrai tulajdonság alapján tünteti ki. Von Neumann kimutatta, hogy ez az algebrai tulajdonság mély topológiai értelemmel bír. Legyen ugyanis $\mathbf{A}$ egy egységelemes önadjungált operátoralgebra. Figyelembe véve azt a tényt, hogy az ST és TS operátorszorzatok rögzített S-re T-nek a gyenge (operátor) topológiában folytonos függvényei, azonnal látható, hogy $\mathbf{A}'$ és $\mathbf{A}''$ a gyenge topológiában zárt, s így az $\mathbf{A} = \mathbf{A}''$ egyenlet fennállásának szükséges feltétele $\mathbf{A}$-nak a gyenge topológiában való zártsága. (A gyenge operátor topológia $\mathbf{B}(\mathrm{H})$-nak az a topológiája, amelyet a $T \mapsto (T\mathrm{x}, \mathrm{y})$ $(\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{H})$ függvények definiálnak $\mathbf{B}(\mathrm{H})$-n. $(\, , \,)$ a H Hilbert-tér skaláris szorzatát jelöli.) Von Neumann úttörő jelentőségű eredménye most az, hogy ez a feltétel elégséges is. Nevezetesen, érvényes az

1. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy egységelemes önadjungált operátoralgebra, amely zárt a gyenge topológiában. Akkor* $\mathbf{A} = \mathbf{A}''$, *azaz* $\mathbf{A}$ *von Neumann-algebra.*

Jegyezzük meg, hogy a fenti tételben a gyenge topológia helyettesíthető a normatopológia kivételével a szokásosan használt operátortopológiák bármelyikével. A részletekért az olvasónak pl. Jacques Dixmier *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann)* (Paris, 1957) c. kitűnő monográfiáját ajánljuk.

Az 1. Tétel azt mutatja, hogy az $\mathbf{A}$ önadjungált operátoralgebrát tartalmazó legszűkebb von Neumann-algebra $\mathbf{A}''$. A tételből az is következik, hogy $\mathbf{A}$-val együtt $\mathbf{A}'$, és $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ közös algebrai centruma $\mathbf{A} \cap \mathbf{A}'$ is von Neumann-algebra.

Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két von Neumann-algebra. $\mathbf{A}$-t és $\mathbf{B}$-t *algebrailag izomorfnak,* röviden *izomorfnak* nevezzük, ha létezik köztük egy kölcsönösen egyértelmű φ leképezés, ami kielégíti a következő feltételeket:

$$\text{a)} \quad \varphi(aS + bT) = a\varphi(S) + b\varphi(T);$$

$$\text{b)} \quad \varphi(ST) = \varphi(S)\varphi(T); \qquad \text{c)} \quad \varphi(T^*) = \big(\varphi(T)\big)^*$$

$(S, T \in \mathbf{A}$; a és b komplex számok). Meg lehet mutatni a következő állítást.

2. Tétel. *A φ izomorfizmus mindkét irányban normatartó leképezés. Továbbá, mindkét irányban gyengén és erősen folytonos a von Neumann-algebrák normában korlátos részhalmazain.*

A von Neumann-algebrák kategóriájában az izomorf von Neumann-algebrákat nem tekintjük algebrailag különbözőknek. Egy von Neumann-algebrához asszociált tulajdonságot, objektumot, mennyiséget stb. *algebrai invariánsnak* nevezünk, ha azt az izomorfizmusok megőrzik.

A csoportok ábrázoláselméletének a Haar-mérték felfedezése (1933) utáni alakulása és a kvantummechanika igényei szükségessé tették a Hilbert-tér skaláris centrumú von Neumann-algebráinak, az ún. *faktoroknak* a behatóbb kutatását.

Az $\mathbf{M}$ von Neumann-algebrát *faktornak* nevezzük, ha az algebrai értelemben vett centruma a skaláris operátorokból áll. Pontosabban $\mathbf{M}$ faktor, ha $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}' = \mathbf{C}(\mathrm{H}) = \{aI : a$ tetszőleges komplex szám$\}$. Faktorra két szélsőséges példa van. Nevezetesen $\mathbf{C}(\mathrm{H})$ és $\mathbf{B}(\mathrm{H})$. Valóban, a $\mathbf{C}(\mathrm{H})$ egységelemes, önadjungált operátoralgebra triviálisan zárt bármelyik operátor topológiában, így kézenfekvően von Neumann-algebra: $\mathbf{C}''(\mathrm{H}) = \mathbf{C}(\mathrm{H})$. Továbbá, az evidens $\mathbf{C}'(\mathrm{H}) = \mathbf{B}(\mathrm{H})$ összefüggésből $\mathbf{B}'(\mathrm{H}) = \mathbf{C}''(\mathrm{H}) = \mathbf{C}(\mathrm{H})$ következik. Így $\mathbf{B}(\mathrm{H}) \cap \mathbf{B}'(\mathrm{H}) = \mathbf{B}(\mathrm{H}) \cap \mathbf{C}(\mathrm{H}) = \mathbf{C}(\mathrm{H})$ adódik, ami azt bizonyítja, hogy $\mathbf{B}(\mathrm{H})$ faktor. Az a tény, hogy $\mathbf{C}(\mathrm{H})$ is faktor, a definícióból következik.

A faktorok elméletét egy cikksorozatban F. J. Murray és J. von Neumann 1936-ban kezdeményezte [2]. Elméletük vázlata a következő.

Legyen $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{B}(\mathrm{H})$ valamely von Neumann-algebra. Jelöljük $\mathbf{M}_P$-vel $\mathbf{M}$ (ortogonális) projekcióinak a halmazát. $\mathbf{M}$ valamely W elemét *parciálisan izometrikus* operátornak nevezzük ha $W^*W = P$ projekció $\mathbf{M}$-ben. Meg lehet mutatni, hogy akkor $WW^* = Q$ is projekció $\mathbf{M}$-ben.

A H Hilbert-tér operátorainak bármely $\mathbf{M}$ von Neumann-algebrája eleget tesz a

$$\mathbf{C}(\mathrm{H}) \subseteq \mathbf{M} \subseteq \mathbf{B}(\mathrm{H})$$

összefüggésnek. Az első kérdés az volt, hogy az $\mathbf{M}$ von Neumann-algebrák között van-e egyáltalán a két szélsőséges $\mathbf{C}(\mathrm{H})$ és $\mathbf{B}(\mathrm{H})$ faktortól különböző faktor vagy sem. Véges dimenziós H esetén, amint azt első cikkükben megmutatják, a válasz a kérdésre pozitív. A végtelen dimenziós esetben egyelőre félreteszik az egzisztencia kérdését s a következőt csinálják. Legyen $\mathbf{M}$ faktor. Az $\mathbf{M}_P$ halmaz P és Q elemeit ($\mathbf{M}$-re vonatkozóan) ekvivalensnek nevezik, jelben $P \sim Q(\mathbf{M})$, vagy egyszerűbben $P \sim Q$, ha van olyan $W \in \mathbf{M}$ parciálisan izometrikus operátor, amely kielégíti a $W^*W = P$ és a $WW^* = Q$ feltételeket. A „$\sim$" reláció egy ekvivalenciareláció. Bevezetik a $P \prec Q$ vagy a $Q \succ P$ relációt is, ami azt jelenti, hogy van egy olyan $Q_1 \leq Q$ projekció $\mathbf{M}$-ben, amelyre $P \sim Q_1$. Ez a reláció reflexív és tranzitív. Bebizonyítják, hogy $P \prec Q$ és $Q \prec P$ maga után vonja $P \sim Q$-t. Az olvasó felfedezheti a szoros analógiát a fenti relációk és a halamazok számosságának az összehasonlítása között. Aztán azt is megmutatják, hogy az $\mathbf{M}$ faktorban két projekció mindig összehasonlítható a fenti értelemben. Pontosabban, ha $P, Q \in \mathbf{M}_P$, akkor $P \prec Q$ vagy $Q \prec P$. Megint csak analógiában a halmazok számosságának az elméletével, egy $\mathbf{M}$-beli P projekciót végtelennek neveznek, ha $P \sim Q < P$. Különben P-t végesnek nevezik. Jegyezzük meg, hogy a Hilbert-tér feltételezett szeparabilitásából következik, hogy a végtelen projekciók mind ekvivalensek egymással. Végül egy zérustól különböző P projekció *minimális* $\mathbf{M}$-ben, ha $Q \in \mathbf{M}_P$, $Q \leq P$ maga után vonja a $Q = O$ vagy a $Q = P$ feltétel teljesülését.

Minimális projekciót tartalmazó faktorra (*diszkrét* eset) példa maga $\mathbf{B}(\mathrm{H})$. Ebben minden egydimenziós altérre vetítő projekció nyilvánvalóan minimális. Murray és von Neumann nagy jelentőségű ötlete most az volt, hogy anticipáltak olyan faktorokat, amelyek nem tartalmaznak minimális projekciókat (*folytonos* eset). Ezekben minden projekció felbontható két, egymással a fenti értelemben ekvivalens diszjunkt projekció összegére. (Két projekciót *diszjunktnak* mondunk, ha szorzatuk nulla.) Ezen alternatívák szem előtt tartása mellett, a projekciók „nagyságrendbeni" összehasonlításának a felhasználásával konstruáltak $\mathbf{M}_P$-n egy $D(P)$ függvényt, ami kielégíti a következő feltételeket:

1. $D(P) = 0$ ha $P = O$; $D(P) > 0$ ha $P \neq O$.
2. $D(P) = \infty$ akkor és csak akkor, ha P végtelen.
3. Ha $P \sim Q$, akkor $D(P) = D(Q)$.
4. $PQ = O$-ból $D(P + Q) = D(P) + D(Q)$ következik.
5. Ha $P \prec Q$ és Q véges, akkor $D(P) \leq D(Q)$.

A $D(P)$ függvényt „relatívdimenziónak" nevezték. Megmutatták, hogy ha $D(P)$ felvesz legalább egy zérustól különböző véges értéket, akkor az 1., a 3. és a 4. tulajdonság $D(P)$-t, konstans szorzótól eltekintve, egyértelműen meghatározza. Érdemes megjegyezni, hogy a $D(P)$ függvény konstrukciója analógiában áll azzal a módszerrel, amit Haar Alfréd követett az invariáns mértékek lokálisan kompakt, szeparábilis és metrizálható csoportokon való egzisztenciájának a kimutatásában.

A diszkrét és a folytonos eset a $D(P)$ függvény értékkészletében tükröződik s ez a faktorok további osztályozásához vezet. Jelöljük Γ-val $D(P)$ értékkészletét. Akkor, a $D(P)$ függvény bizonyos normalizálása után, a következő alternatívák közül pontosan egy fordul elő:

(I_n) $\Gamma = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$;
(I_∞) $\Gamma = \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$;
(II_1) $\Gamma = [0, 1]$ (a zárt egység intervallum);
(II_∞) $\Gamma = [0, \infty]$ (a végtelennel lezárt félegyenes);
(III) $\Gamma = \{0, \infty\}$.

Ennek megfelelően, a faktorokat *véges diszkrét, féligvéges diszkrét, véges folytonos, féligvéges folytonos,* ill. *tisztán végtelen* faktoroknak nevezték. A faktorok szóbeli osztályozása helyett a következőkben inkább a típus jelbeli meghatározását fogjuk használni. Így (I), (II), és (III) típusú faktorokról beszélünk, ha nincs szükségünk a további alesetek megjelölésére.

Az első, közvetlenül felmerülő alapvető kérdés itt az, hogy léteznek-e egyáltalán a fenti típusú faktorok. A válasz kézenfekvően pozitív az (I) típusú faktorok esetében. $\mathbf{B}(\mathrm{H})$ ezekre példa a $\dim \mathrm{H} = n$ vagy a $\dim \mathrm{H} = \infty$ választás mellett. A normalizált relatívdimenzió függvény értéke itt a $P\mathrm{H}$ ($P \in \mathbf{M}_P$) alterek közönséges Hilbert-dimenziója. (II) típusú faktorokra Murray és von Neumann mutattak példát első közösen írt cikkükben 1936-ban [2], majd von Neumann egyedül konstruált példát (III) típusú faktorra 1940-ban [3]. Konstrukciójuk lényegében csoportelméleti konstrukció. Vázoljuk a konstrukció lényegét. A mértékelméleti terminológiát P. R. Halmos *Measure Theory* (New York, 1950) c. könyvéből kölcsönözzük.

Legyen (X, S, μ) valamely pozitív, teljes, szeparábilis, σ-véges mértéktér. Legyen továbbá G egy megszámlálhatóan végtelen diszkrét csoport, amelynek elemei az X halmaznak olyan kölcsönösen egyértelmű leképezései, amelyek az $\mathbf{S}$ gyűrűnek automorfizmusait indukálják. Ha $x \in X$ és $a \in G$, akkor a hatását az x elemen ax-szel jelöljük. A μ mértéket G-re vonatkozóan *kvázi-invariánsnak* nevezzük, ha $\mu(E) = 0$, $E \in \mathrm{S}$ maga után vonja a $\mu(aE) = 0$ feltétel teljesülését minden $a \in G$ esetén. Ez azt jelenti, hogy az „eltolt" mérték $\mu_a(F) = \mu(aF)$ $(F \in \mathrm{S})$ abszolút folytonos μ-re vonatkozóan, így a Radon–Nikodym derivált, $\frac{d\mu_a}{d\mu}(x)$ megformálható minden a esetén. Most a G csoportot (i) *szabadnak* nevezzük, ha minden $a \in G$, $a \neq e$, esetén a fixpontjainak a halmaza μ-zérus mértékű; (ii) G *ergodikus,* ha $\mathbf{S}$ egy olyan E elemére, amelyet G elemei önmagába transzformálnak, vagy $\mu(E) = 0$ vagy $\mu(X - E) = 0$; (iii) G, definíció szerint, *mérhető,* ha van olyan μ-vel ekvivalens σ-véges pozitív v mérték $\mathbf{S}$-en, amely invariáns G-re vonatkozóan, azaz $v(aE) = v(E)$ minden $E \in \mathbf{S}$ és minden $a \in G$ esetén; (iv) G *nem mérhető* ellenkező esetben.

Ezek után, tegyük fel, hogy a μ mérték kvázi-invariáns a G csoportra nézve, s tekintsük a $G \times X$ Descartes-féle szorzaton definiált mindazon komplex értékű $f(a, x)$ függvényt, amely minden rögzített a esetén mérhető x-re vonatkozóan és amely kielégíti a

$$\sum_{a \in G} \int_X |f(a, x)|^2 \, d\mu(x) < +\infty$$

feltételt. Ezek a függvények az

$$(f, g) = \sum_{a \in G} \int_X f(a, x)\overline{g}(a, x) \, d\mu(x)$$

belsőszorzatra nézve egy H szeparábilis Hilbert teret alkotnak. Most egy adott, de tetszésszerinti korlátos és mérhető komplex-értékű $\varphi(x)$ függvényre definiáljuk H-n a következő korlátos lineáris operátorokat:

$$
(*) \qquad \begin{aligned}
(U_{a_0} f)(a, x) &= \left(\frac{d\mu_{a_0}}{d\mu}(x)\right)^{1/2} f(a_0 a, a_0 x), \\
\big(L_{\varphi(x)} f\big)(a, x) &= \varphi(x) f(a, x).
\end{aligned}
$$

Megmutatják, hogy ha G kielégíti az (i)–(iii) feltételeket, akkor a fenti operátorok által generált **M** von Neumann-algebra (I) vagy (II) típusú faktor [2], míg ha G az (i), (ii) és (iv) feltételeket elégíti ki, akkor **M** (III) típusú faktor [3].

Klasszikus példa egy (III) típusú faktorra a fenti objektumok következő választásával nyerhető. Legyen X a számegyenes, **S** a számegyenes Lebesgue-mérhető részhalmazainak a Borel-féle halmazteste, m pedig a Lebesgue-mérték **S**-en. Legyen a és b két racionális szám úgy, hogy $a > 0$, s definiáljuk a számegyenes $T(a, b)$ transzformációját a következő szabály szerint: $x \to T(a, b)(x) = ax+b$. Az adott feltételek mellett, az a és b racionális számok összes lehetséges választásával a $T(a, b)$ transzformációk egy megszámlálhatóan végtelen G csoportot alkotnak. A csoport műveleti szabálya a transzformációk egymásután való végzése. Be lehet látni, hogy m kvázi-invariáns G-re nézve, G kielégíti az (i), (ii) és (iv) feltételeket, s így a $(*)$ alatti operátorok egy **M** (III) típusú faktort generálnak.

Az elmélet második alapvető kérdése az volt, hogy a faktorok felsorolt típusai algebrailag nem triviálisak-e, azaz egy adott típushoz tartozó faktorok között vannak-e nem izomorfak. Ez a kérdés lényegében az algebrai invariánsok elméletébe vág. A típusokat ugyanis algebrai invariánsok formájában definiáltuk. A használt operátortípusok mint a projekciók, parciálisan izometrikus operátorok stb., valamint a projekciók ekvivalenciája, „nagyságbeli" összehasonlítása, végessége, végtelensége, minimalitása és a relatív dimenziófüggvény, konstans szorzótól eltekintve, mind algebrai invariánsok. A kérdés lényegében tehát az, hogy a felsorolt invariánsok az algebrai invariánsok egy teljes rendszerét alkotják-e vagy sem. Az (I) típus esetét Murray és von Neumann már első cikkükben rendezték [2]. Itt a relatív dimenziófüggvény az algebrai invariánsok egy „teljes" rendszere. Ha két (I) típusú faktoron a relatív dimenziófüggvény értékkészlete ugyanaz, akkor a két faktor izomorf. Az (I) típus altípusai tehát algebrailag triviálisak. Kiderült, hogy a (II) típus esetében ez nem így van. Murray és von Neumann 1943-ban, egy újabb algebrai invariáns bevezetésével, példát konstruált két nem izomorf (II_1) (ill. (II_∞)) típusú faktorra [4]. A (III) típusú faktorok esetét azonban megoldatlanul hagyták s ebben a dologban Pukánszky Lajos 1956-ban közölt felfedezéséig előrehaladás nem történt.

Mivel a klasszikus Murray–von Neumann csoportelméleti konstrukció tág lehetőséget hagy az alapobjektumok, úgymint a mérhető tér, a mérték, a transzformációcsoport stb., megválasztására, az lenne várható, hogy a folytonos (II) és (III) típus esetében algebrailag különböző faktorok konstruálása nem probléma. Hogy ez nem így van, azt a faktorok elméletének az alakulása bizonyítja. Mi több, úgy tűnik, hogy Murray és von Neumann matematikai virtuozitása sem volt elegendő ahhoz, hogy a kérdéskört lezárja. Nézzük most Pukánszky Lajos eredményét [5].

2. Pukánszky Lajos eredményének a vázolása

Pukánszky ambíciója az volt, hogy szeparábilis Hilbert-téren példát adjon két nem izomorf (III) típusú faktorra, s ezzel megoldja Murray és von Neumann egy 13 éves problémáját. Mielőtt valamennyire is részletekbe mennénk, vázoljuk alapötletét.

Egy, a megfogalmazásra nézve meglepően egyszerű algebrai invariánst vezetett be, amit keresztneve „Lajos" kezdőbetűje után *L-tulajdonságnak* nevezett el (Pukánszky személyes közlése).

Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{M}$ von Neumann-algebra rendelkezik az L-tulajdonsággal, ha létezik unitér elemeinek egy U_k sorozata, amelyik kielégíti a következő feltételeket:

1. $U_k \to 0$ a gyenge topológiában;
2. $\mathbf{M}$ mindegyik A eleme esetén $U_k^{-1}AU_k \to A$ az erős topológiában ($k \to \infty$).

Bizonyítsuk be, hogy az L-tulajdonság algebrai invariáns, azaz ha $\mathbf{M}$ rendelkezik az L-tulajdonsággal és az $\mathbf{N}$ von Neumann-algebra izomorf $\mathbf{M}$-mel, akkor $\mathbf{N}$ is rendelkezik az L-tulajdonsággal. Valóban, legyen $\varphi : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ valamely izomorfizmus $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ között. Mivel izomorfizmus az egységelemet az egységelembe viszi át, az izomorfizmusok felsorolt algebrai tulajdonságai értelmében φ unitér operátort unitér operátorra képez le. Ehhez csak az unitér operátor definícióját kell figyelembe venni: U unitér, ha $U^*U = UU^* = I$. Most alkalmazzuk φ-t az egyenlőségek oldalaira s akkor azt kapjuk, hogy

$$\varphi(U)^*\varphi(U) = \varphi(U^*U) = \varphi(UU^*) = \varphi(U)\varphi(U)^* = \varphi(I),$$

ahol $\varphi(I)$ az $\mathbf{N}$ von Neumann-algebra egységeleme, így $\varphi(U)$ unitér $\mathbf{N}$-ben, s ez éppen az állításunk. Továbbá azt is említettük, hogy az izomorfizmusok folytonosak a gyenge és az erős operátor topológiában $\mathbf{M}$ normában korlátos részhalmazain (2. Tétel). Így, mivel az unitér operátorok normája 1-gyel egyenlő, a $\varphi(U_k)$ az $\mathbf{N}$ von Neumann-algebra unitér operátorainak egy gyengén nullához konvergáló sorozata lesz, tehát kielégíti az 1. Feltételt. A 2. Feltétel bizonyításához most már csak azt kell megjegyeznünk, hogy $\mathbf{N}$ bármely B eleme $B = \varphi(A)$ ($A \in \mathbf{M}$) alakban írható, s hogy $\|U_k^{-1}AU_k\| \leq \|A\|$ ($k = 1, 2, \ldots$). A végső konklúzió φ-nek a normában korlátos részhalmazokon tekintett erős topológiában való folytonosságából vonható le.

Most Pukánszky úttörő jelentőségű eredménye az volt, hogy szeparábilis Hilbert-téren konstruált két (III) típusú faktort, amelyek közül az egyik rendelkezik az L-tulajdonsággal, a másik meg nem. A két faktor így nem lehet algebrailag izomorf, mert az L-tulajdonság, amint azt láttuk, algebrai invariáns. Fogalmazzuk meg ezt egy tétel formájában.

Pukánszky tétele. *Szeparábilis Hilbert-téren léteznek nem izomorf* (III) *típusú faktorok.*

A részletek taglalása nélkül, nézzük konstrukciójának a lényegét.

Definiáljuk a következő $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$ valószínűségi mértékteret, ahol $X_0 = \{0,1\}$, $\mathbf{S}_0$ a kételemű halmaz részhalmazainak a családja, és $\mu_0(\{0\}) = p$ $(0 < p < 1/2)$, $\mu_0(\{1\}) = 1 - p$. Most $n = 1, 2, \dots$ esetén legyen $(X_n, \mathbf{S}_n, \mu_n) = (X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$ és vegyük ezen mértékterek mértékelméleti szorzatát, azt tegyük teljessé s jelöljük az eredményt $(X, \mathbf{S}, \mu)$-vel. X egy x eleme úgy tekinthető, mint egy (x_n) sorozat, amelynek elemei 0-ból és 1-ből állnak. Ha $x, y \in X$, az $x+y$ összeget az (x_n+y_n) sorozattal definiáljuk, ahol az összeadást mod 2 vesszük. Ez a műveleti szabály X-et csoporttá teszi. Ebben azon sorozatoknak a Δ összessége, amelyek tagjai a pozitív egész számok esetenként változó véges részhalmazain kívül zérók, a fenti műveleti szabályra vonatkozóan egy megszámlálhatóan végtelen részcsoportot alkot. Most $\gamma \in \Delta$ esetén legyen $x \mapsto \gamma x = \gamma + x$ $(x \in X)$. Ezek a transzformációk X-nek önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezéseit szolgáltatják. Pukánszky lenyűgöző bravúrral kimutatja, hogy a μ mérték kvázi-invariáns Δ-ra nézve, és hogy a Δ csoport kielégíti a csoportkonstrukcióban szereplő (i), (ii) és (iv) feltételt, s így a $(*)$ alatt definiált operátorok H-n egy (III) típusú $\mathbf{M}_p$ faktort generálnak, amelyről aztán bebizonyítja, hogy eleget tesz az L-tulajdonságnak.

Annak bemutatására, hogy létezik szeparábilis Hilbert-téren olyan (III) típusú faktor, amely nem rendelkezik az L-tulajdonsággal, az előbbi konstrukciót a következőképpen módosítja. Diszkrét valószínűségi mértéktérrel kezdi: $\mu_0(\{0\}) = q$, $\mu_0(\{1\}) = 1 - q$ $(0 < q < 1/2)$. Amikor a szorzat mértéktér formálására kerül sor, Pukánszky egy két generátorral bíró G szabad csoport elemei szerint indexeli a faktor mértéktereket. Így a végső eredményül kapott $(X, \mathbf{S}, \mu)$ mérték esetén X elemei G-n definiált, $\{0,1\}$ értékkészlettel bíró (x_g) függvények lesznek. Definiáljuk Δ-t úgy, mint azon függvények halmazát, amelyek G esetenként változó véges részhalmazain kívül eltűnnek. A komponensekként való összeadásra nézve mod 2 számolással Δ csoportot alkot. Legyen $\mathbf{G} = \Delta \times G$, és $\mathbf{G}$ egy (α, a) eleméhez asszociáljuk a következő $T(\alpha, a)$ leképezést: $x \to T(\alpha, a)x = (x_{ag} + \alpha_g)$ $(x \in X)$. Ezek a leképezések X-et kölcsönösen egyértelműen képezik le önmagára. Pukánszky megmutatja, hogy a $T(\alpha, a)T(\beta, b) = T(\alpha^b + \beta, ab)$, ahol $(\alpha g)^b = (\alpha_{bg})$, műveleti szabályra vonatkozóan $\mathbf{G}$ csoportot alkot, amire nézve μ kvázi-invariáns és ami az adott mértéktérre nézve kielégíti az (i), (ii) és a (iv) feltételt. Így a $(*)$ operátorok egy (III) típusú $\mathbf{N}_q$ faktort generálnak, amiről aztán bebizonyítja, hogy nem tesz eleget az L-tulajdonságnak.

A fenti konstrukció az mutatja, hogy Pukánszky Lajos valójában két egyparaméteres, (III) típusú faktorokból álló családot konstruált, $\mathbf{M}_p$-t $(0 < p < 1/2)$ és $\mathbf{N}_q$-t $(0 < q < 1/2)$ úgy, hogy az $(\mathbf{M}_p, \mathbf{N}_q)$ faktorpárok nem izomorfak a $0 < p, q < 1/2$ paraméter értékek egyetlen párosítása mellett sem. A különböző p (ill. q) paraméter értékekhez tartozó $\mathbf{M}_p$ (ill. $\mathbf{N}_q$) faktorok egymáshoz való, az algebrai izomorfizmusok szempontjából felmerülő lehetséges kapcsolatait Pukánszky idézett cikkében nem vizsgálta. Így végeredményben Pukánszky után két nem izomorf (III) típusú faktorra maradt fenn példa. Ezt az eredményt J. T. Schwartz 1963-ban javította egy harmadik új (III) típusú faktor hozzáadásával, úgyhogy attól kezdve három páronként nem izomorf (III) típusú faktor lett ismert. A kérdés azonban nyitva maradt: szeparábilis Hilbert-téren van-e háromnál több páronként nem izomorf (III) típusú faktor? (Az analóg kérdés akkor még a (II_1) típusú faktorokra is megválaszolatlan volt.) Arra vonatkozóan adatunk nincs, hogy Pukánszky tett-e erőfeszítést e kérdés megoldására vagy sem. A kérdésre a választ Robert T. Powers amerikai matematikus adta meg 1967-ben, bebizonyítva a következő meglepő élességű tételt:

Powers tétele. *Szeparábilis Hilbert-téren kontinuumnyi sok páronként nem izomorf* (III) *típusú faktor létezik.*

Nézzük meg Powers eredményét közelebbről. Az eredmény megmagyarázásához előkészítésre lesz szükségünk, amit talán a szükségesnél erősebb megszorítások mellett hajtunk végre az egyszerűbb kifejthetőség kedvéért.

Legyen $\mathbf{A}$ valamely egységelemes C^*-algebra, azaz egy olyan egységelemes önadjungált operátoralgebra, amelyik zárt az egyenletes operátortopológiában. Egy $\mathbf{A}$-n definiált ω lineáris funkcionált pozitívnak nevezünk, ha bármely $T \in \mathbf{A}$, $T \neq O$ esetén $\omega(T^*T) > 0$. A pozitív ω funkcionált állapotnak nevezzük, ha $\|\omega\| = \omega(I) = 1$. Könnyű belátni, hogy az $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ halmazon az

$$(S,T)_\omega = \omega(T^*S) \qquad (S,T \in \mathbf{A})$$

összefüggés egy skaláris szorzatot definiál, amely $\mathbf{A}$-ból egy, általában nem teljes belső szorzat teret képez. Tegyük ezt teljessé s az eredményül kapott Hilbert-teret jelöljük H_ω-val. Most $S \in \mathbf{A}$ esetén, definíció szerint, legyen

$$\pi(S)T = ST \qquad (T \in \mathbf{A}).$$

Meg lehet mutatni, hogy a $T \longrightarrow \pi(S)T$ leképezés a H_ω Hilbert-tér mindenütt sűrű $\mathbf{A}$ részhalmazának egy önmagába való korlátos lineáris leképezése, amit egyértelműen ki lehet terjeszteni $\mathbf{B}(\mathrm{H}_\omega)$ egy ugyancsak $\pi(S)$-sel jelölt elemévé. Továbbá, érvényesek a következő összefüggések:

$$\pi(aS_1 + bS_2) = a\pi(S_1) + b\pi(S_2), \qquad \pi(S_1S_2) = \pi(S_1)\pi(S_2), \qquad \pi(S^*) = \big(\pi(S)\big)^*,$$

azaz az $S \mapsto \pi(S)$ leképezés az $\mathbf{A}$ C^*-algebra egy ábrázolása a H_ω Hilbert-téren. A $\{\pi(S)\}$ $(S \in \mathbf{A})$ operátorok egy egységelemes $\pi_\omega(\mathbf{A})$ önadjungált operátoralgebrát alkotnak H_ω-n, amelynek a gyenge topológiában való lezárása $\big(\pi_\omega(\mathbf{A})\big)''$ egy von Neumann-algebra lesz. Nevezzük ezt a von Neumann-algebrát az *ω állapot által indukált von Neumann-algebrának.* Ha ez egy faktor, akkor ω-t *faktor állapotnak* hívjuk. Így az $\mathbf{A}$ C^*-algebra és az ω állapot alkalmas megválasztásával faktorok konstruálhatók. Robert Powers ezt a módszert használta eredményének elérésére.

Egy $\mathbf{M}$ von Neumann-algebrát $\{n_i\}$ *osztályú hipervéges* von Neumann-algebrának nevezünk, ha létezik a természetes számoknak egy szigorúan növekvő végtelen sorozata $\{n_i\}$ s ehhez (I_{n_i}) típusú faktoroknak egy, a tartalmazásra nézve növekvő $\mathbf{M}_i$ sorozata úgy, hogy

$$\mathbf{M} = \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{M}_i\Big)''.$$

A hipervéges von Neumann-algebrák Murray és von Neumann *approximációban véges faktorainak* triviális általánosításai. Az approximációban véges faktorok (II_1) típusú hipervéges faktorok. Murray és von Neumann kimutatta, hogy, az osztályjellegtől függetlenül, bármely két (II_1) típusú hipervéges faktor izomorf. (A hipervégesség mint tulajdonság a von Neumann-algebráknak algebrai invariánsa. Ennek bizonyításához bővebb topológiai előkészítésre lett volna szükségünk.) Powers ennek az állításnak a megfelelőjét tanulmányozta (III) típusú hipervéges faktorokra s azt találta, hogy kontinuumnyi sok páronként nem izomorf (III) típusú hipervéges faktor létezik. Ez Powers tételének pontosabb megfogalmazása.

A hipervégesség analóg módon fogalmazható meg C^*-algebrákra, csak a definícióban felmerülő véges diszkrét faktorok uniójának a gyenge topológiában való lezárása helyett az egyenletes (norma-) topológiában való lezárását tekintjük. A megfelelő C^*-algebrákat *egyenletesen hipervéges algebráknak* nevezzük. Ezeket az algebrákat James Glimm tanulmányozta és teljes mértékben osztályozta is őket algebrailag [6]. Powers gondolatmenete vázlatosan így interpretálható. (A részletekért az olvasót Powers eredeti dolgozatára [8], és S. Sakai *C^*-algebras and W^*-algebras* (Springer, 1971) c. monográfiájára utaljuk.)

Tekintsünk egy $\{2^i\}$ osztályú egyenletesen hipervéges $\mathbf{A}$ C^*-algebrát. Ez előállítható egy végtelen C^*-tenzorszorzatként: $\mathbf{A} = \mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_2 \otimes \cdots$, ahol a tenzorszorzatban az $\mathbf{N}_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ faktorok mindegyike ugyanazzal az (I_2) típusú $\mathbf{N}$ faktorral egyenlő. Most legyen $0 < \lambda < 1/2$ egy valós szám, s definiáljunk egy φ_λ állapotot $\mathbf{N}$-en a következő módon:

$$\varphi_\lambda(T) = \varphi_\lambda \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \lambda\alpha + (1-\lambda)\delta \qquad (T \in \mathbf{N}),$$

s legyen

$$\omega_\lambda = \bigotimes_i \varphi_\lambda^{(i)},$$

a $\varphi_\lambda^{(i)} = \varphi_\lambda$ $(i = 1, 2, \ldots)$ állapotok végtelen tenzorszorzata. ω_λ egy faktor állapot lesz $\mathbf{A}$-n, amely egy hipervéges $\mathbf{F}_\lambda$ faktort indukál. Powers kimutatta, hogy az ω_λ állapotok a megfelelő $\mathbf{F}_\lambda$ faktorok algebrai invariánsainak egy teljes rendszerét alkotják: $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1/2$ esetén $\mathbf{F}_{\lambda_1}$ akkor és csak akkor izomorf $\mathbf{F}_{\lambda_2}$-vel ha $\omega_{\lambda_1} = \omega_{\lambda_2}$, azaz $\lambda_1 = \lambda_2$. Így kontinuumnyi sok páronként nem izomorf $\mathbf{F}_\lambda$ faktor van. Most annak a kimutatására, hogy ezek a faktorok mind (III) típusúak, Powers James Glimm fent említett [6] munkáját használja, amiben Powers faktorai egy más összefüggésben és formában már megjelentek. Ott Glimm úgy dönti el a faktorok típusait, hogy megmutatja, hogy az $\mathbf{F}_\lambda$ faktorok mindegyike izomorf Pukánszky megfelelő (III) típusú $\mathbf{M}_\lambda$ faktorával. Ebből nemcsak Powers tétele következik, de ez azt is mutatja, hogy Pukánszky $\mathbf{M}_p$ faktorai páronként nem izomorf (III) típusú hipervéges faktorok, és hogy a Pukánszky által konstruált kontinuumnyi sok $\mathbf{N}_q$ (III) típusú faktor egyike sem hipervéges. Arra vonatkozóan, hogy $\mathbf{N}_q$ elemei között vannak-e páronként algebrailag különbözőek vagy sem, információnk nincs.

Az viszont igaz, hogy ha bármelyik $\mathbf{N}_q$ faktornak pl. McDuff páronként nem izomorf (II_1) típusú faktoraival való tenzorszorzatait képezzük, akkor kontinuumnyi sok páronként nem izomorf nem hipervéges (III) típusú faktort nyerünk. (Mindezekért l. Sakai könyvében 4.3-at.)

Pukánszky tollából, tudomásunk szerint, eredményének Powers tételével való kapcsolatáról semmi adat nem maradt fenn. Az irodalomban sem találtunk utalást ezt illetően abban a formában, ahogy mi azt itt leírtuk. Arra vonatkozóan különösen nem találtunk semmi dokumentumot, ami hitelt adna Pukánszkynak azért a tényért, hogy lényegében ő volt az első, aki szeparábilis Hilbert-téren kontinuumnyi sok páronként nem izomorf (III) típusú faktort konstruált, előkészítve ezzel az utat Powers 12 évvel későbbi nagy horderejű felfedezéséhez.

* * *

A szerző hálás köszönetét fejezi ki azért a segítségért, amit a lektortól és a szerkesztőtől kapott a cikk végleges formájának a kialakításában.

Irodalom

[1] Hajnal A., Korányi Á., J. Dixmier és M. Duflo, Pukánszky Lajos (1928–1996) matematikai munkásságáról, *Matematikai Lapok* (új sorozat), **4** (1994), 2–3. (megjelent 1998-ban), 71–81.

[2] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, *Ann. of Math.*, **37** (1936), 116–229.

[3] J. von Neumann, On rings of operators, III, *Ann. of Math.*, **41** (1940), 94–161.

[4] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, IV, *Ann. of Math.*, **44** (1943), 716–808.

[5] L. Pukánszky, Some examples of factors, *Publ. Math. (Debrecen)*, **4** (1956), 135–156.

[6] J. Glimm, Type I C^*-algebras, *Ann. of Math.*, **73** (1961), 572-612.

[7] J. T. Schwartz, Non-isomorphism of a pair of factors of type (III), *Comm. Pure Appl. Math.*, **16** (1963), 247–252.

[8] R. T. Powers, Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings, *Ann. of Math.*, **86** (1967), 138–171.

Kovács István
4251 Tara Dr. E.
Mobile
AL 36619
USA

István Kovács: Lajos Pukánszky and the theory of factors

This expository article centers about one of Pukánszky's early ideas in the theory of operator algebras by which he constructed an example of a pair of algebraically non-isomorphic type (III) factors in a separable Hilbert space in 1956. The question of the existence of such pair of factors was raised, but left unanswered by F. J. Murray and John von Neumann in 1943.

A III. TÍPUSÚ NEUMANN-ALGEBRÁK OSZTÁLYOZÁSA

ANDAI ATTILA

A Neumann-algebrák elméletének alapfogalmaival megismerkedhetett az olvasó Kovács István *Pukánszky Lajos és a faktorok elmélete* [5] című cikkéből. A Neumann-algebrák osztályozása hosszú évtizedek óta jelent meglehetősen nehéz problémát. Az első lépéseket Neumann és Murray tette meg a 30-as években, erről jó áttekintést kap az olvasó az említett cikkből. Osztályozni legkönnyebben a triviális centrummal rendelkező Neumann-faktorokat lehet. Ezeket Murray és Neumann I., II. és III. típusokba sorolta. A három alaptípus közül legtovább a III. típus megértése tartott. Az 1970-es években az akkor kiépült Tomita–Takesaki elmélet talaján Alain Connes a III. típust III_λ $(0 \leq \lambda \leq 1)$ altípusokba osztotta. Connes leírását adta a III_λ típusoknak $0 \leq \lambda < 1$ esetén. A III_1 altípushoz tartozó faktor egyértelműségének megmutatásával 1985-ben Uffe Haagerup tette teljessé a hipervéges Neumann-faktorok osztályozását.

Bevezető

Legyen H komplex számtest feletti Hilbert-tér és jelölje $\mathcal{B}(H)$ a H korlátos lineáris operátorai halmazát. Az $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ részhalmaz

$$M' := \{a \in \mathcal{B}(H) \,|\, ax = xa \ \forall x \in M\}$$

az M *kommutánsa,* valamint $M'' := (M')'$ a *második kommutánsa.* Egy $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ részhalmaz *Neumann-algebra,* ha olyan egységelemes algebra, mely megegyezik a második kommutánsával valamint minden elemének az adjungáltját is tartalmazza. Az M Neumann-algebra *Neumann-faktor,* ha $M \cap M'$ csak az egységelem számszorosait tartalmazza. Egy $\varphi : M \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál

(1) *pozitív,* ha minden $x \in M$ elemre $0 \leq \varphi(x^*x)$,

(2) *hű,* ha minden $0 \neq x \in M$ esetén $0 < \varphi(x^*x)$,

---

A dolgozat az OTKA T 032662 számú támogatásával készült.
Köszönettel tartozom Petz Dénesnek a cikk megírásában nyújtott segítségéért.

(3) *nyomszerű,* ha minden $x \in M$ elemere $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$,

(4) *normális,* ha pozitív operátorok minden korlátos $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozatára

$$\varphi(\sup_{i \in I} x_i) = \sup_{i \in I} \varphi(x_i)$$

teljesül,

(5) *állapot,* ha pozitív és $\varphi(\mathrm{id}_H) = 1$.

Minden M Neumann-algebrához (pozitív számszorzó erejéig egyértelműen) létezik egy, a projekciók halmazán értelmezett dimenziófüggvény [5], melynek (normált) értékkészlete algebrai invariáns (vagyis algebrailag izomorf Neumann-algebrák esetén a normált dimenziófüggvények értékkészletei azonosak). Azon Neumann-algebrákat, melyekre a dimenziófüggvény értékkészlete csak a $0, \infty$ elemeket tartalmazza *III. típusúaknak* nevezik. Ezek további osztályozásához újabb algebrai invariánsokat kellett találni.

A Neumann-algebrák osztályozásában előforduló fontosabb tételek valamint egymáshoz való kapcsolatuk a [3] könyv bevezetőjében összefoglalva megtalálhatók. Az osztályozásnál használatos tételeket, egyszerűbb bizonyításokat valamint megértést segítő példákat találhat az olvasó a [7] könyvben.

Tomita–Takesaki elmélet

A következőkben olyan Neumann-algebrákkal foglalkozunk, melyek egy komplex szeparábilis Hilbert-tér operátorainak rész-Neumann-algebráiként foghatók fel. Valamilyen M Neumann-algebrát akkor tudunk eredményesen vizsgálni ha egy adott állapotához sikerül előállítani egy H Hilbert-teret és egy $\pi : M \to \mathcal{B}(H)$ algebra-izomorfizmust, mellyel az adott állapot vektorállapottá válik. A megoldás a *Gelfand–Najmark–Segal (GNS) konstrukció,* melynek csak a végeredményére szorítkozva azt mondhatjuk, hogy:

Tétel. *Ha φ egy hű normális állapot az M Neumann-algebrán, akkor létezik egy $(H_\varphi, \pi_\varphi, \Omega_\varphi)$ hármas, ahol*

(1) *H_φ komplex szeparábilis Hilbert-tér, és $\pi_\varphi : M \to \mathcal{B}(H_\varphi)$ $*$-algebra-homomorfizmus,*

(2) *$\Omega_\varphi \in H_\varphi$ és a $\pi_\varphi(M)\Omega_\varphi$ halmaz lezártja H_φ,*

(3) *minden $a \in M$ elemre $\varphi(a) = \langle \pi_\varphi(a)\Omega_\varphi, \Omega_\varphi \rangle$ teljesül.*

Érdemes megjegyezni, hogy adott φ hű normális állapothoz tartozó $(H_\varphi, \pi_\varphi, \Omega_\varphi)$ hármas unitér ekvivalencia erejéig egyértelmű. Ennek a GNS konstrukciónak a segítségével azonosíthatjuk M-et a π_φ $*$-algebra homomorfizmus szerinti képével, mely része $\mathcal{B}(H_\varphi)$-nek.

Bevezetünk két új fogalmat, melyek fontos szerepet kapnak a későbbiekben. Egy $\Omega \in H$ vektor *ciklikus vektora az* $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ *Neumann-algebrának*, ha a

$$M\Omega := \{a\Omega \mid a \in M\}$$

altér sűrű H-ban, valamint Ω *szeparáló vektora az* M *algebrának*, ha minden $a \in M$ elemre az $a\Omega = 0$ egyenlőségből $a = 0$ következik.

Ha φ hű normális állapot az M Neumann-algebrán, akkor a hozzá tartozó Ω_φ vektor a H_φ Hilbert-térben ciklikus (a GNS-konstrukció miatt), valamint szeparáló (mivel φ hű állapot).

Visszatérve a GNS-tételre, kérdés maradt, hogy vajon tetszőleges M Neumann-algebra esetén létezik-e φ hű normális állapot M-en. A válasz az, hogy igen (figyelem: csak olyan M Neumann-algebrával foglalkozunk, amely ábrázolható komplex, szeparábilis Hilbert-téren). Egészen más a helyzet, ha nyomszerű φ hű normális állapot létezésére vagyunk kíváncsiak. Ekkor kiderül, hogy csak véges Neumann-algebrákon (vagyis ahol minden izometria unitér) létezik ilyen állapot. Vagyis III. típusú algebrán nincs nyomszerű, hű normális állapot. Nagy áttörést jelentett a III. típusú faktorok osztályozásában Tomita ötlete, ő ugyanis a hű normális állapotok nyomszerűségtől való eltérését kezdte el vizsgálni [9].

A φ állapot pontosan akkor nyomszerű, ha minden $a \in M$ esetén

$$\left\|\pi_\varphi(a)\Omega_\varphi\right\| = \left\|\pi_\varphi(a^*)\Omega_\varphi\right\|$$

teljesül. Ezért a III. típusú Neumann-algebrák esetén (sőt a végtelen Neumann-algebráknál is) gyümölcsözőnek tűnő ötlet a

$$\pi_\varphi(a)\Omega_\varphi \to \pi_\varphi(a^*)\Omega_\varphi$$

leképezés izometria erejéig való vizsgálata.

Tegyük fel, hogy $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ Neumann-algebra, és $x \in H$ ciklikus, szeparáló vektora M-nek. Tekintsük az

$$S : M\Omega \to H \qquad a\Omega \mapsto a^*\Omega$$

konjugált lineáris leképezést. Legyen $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$ a poláris felbontása S-nek, vagyis J konjugált lineáris izometria és Δ önadjungált pozitív (általában nem korlátos) operátor. A Δ operátort nevezik az M *Neumann-algebra moduláris operátorának*, melynek központi jelentőségét fejezi ki az alábbi tétel.

Tomita–Takesaki-tétel. *Az eddigi jelöléseket alkalmazva*

(1) *minden t valós számra* $\Delta^{it}M\Delta^{-it} = M$,

(2) *$JMJ = M'$, ahol M' az M kommutánsát jelöli.*

Ez a meglehetősen bonyolultan igazolható tétel, mely központi szerepet játszik a Neumann-algebrák elméletében először Tomita [9] nem publikált kéziratában jelent meg. Majd 1970 körül Takesaki sokat finomított a bizonyításon és a tételnek sok lehetséges alkalmazására mutatott rá [8]. Az érdeklődő olvasó a tétel viszonylag rövid bizonyítását megtalálhatja Bratteli és Robinson könyvében [1].

A GNS-tételt és a Tomita–Takesaki-tételt alkalmazva egy M Neumann-algebrára azt mondhatjuk, hogy ha φ egy hű normális állapot M-en (tudjuk, hogy ilyen létezik), akkor a π_φ leképezés segítségével $\mathcal{B}(H_\varphi)$ egy rész-Neumann-algebrájával azonosítható az M, valamint az Ω_φ vektor ciklikus és szeparáló $\pi_\varphi(M)$-re nézve. Ekkor definiálható az S_φ leképezés, melynek a polárfelbontásából megkapjuk a Δ_φ moduláris operátort. Ennek a segítségével a Tomita–Takesaki-tétel szerint minden t valós számra értelmezhető a

$$\sigma_t^\varphi(x) = \pi_\varphi^{-1}\left(\Delta_\varphi^{it}\pi_\varphi(x)\Delta_\varphi^{-it}\right)$$

automorfizmusa M-nek. Az így kapott $(\sigma_t^\varphi)_{t\in\mathbb{R}}$ egyparaméteres csoportot nevezik *moduláris automorfizmus csoportnak.* Váratlan fordulatot jelentett a Neumann-algebrák elméletében, hogy minden hű normális állapothoz tartozik egy kitüntetett automorfizmus csoport.

A következő feltételek ekvivalenciája jól szemlélteti, hogy a Δ_φ moduláris operátor tényleg a φ állapot nyomszerűségével van kapcsolatban.

(1) A φ hű állapot nyomszerű.

(2) $\Delta_\varphi = \mathrm{id}_{H_\varphi}$.

(3) Minden t valós számra és $a \in M$ elemre $\sigma_t^\varphi(x) = x$.

Connes-féle osztályozás

A Neumann-algebrák elméletében, a moduláris automorfizmus csoport felfedezésének hatására, előtérbe kerültek a csoporthatások vizsgálatai. Két fő kérdés volt, melyek a Neumann-algebrák további osztályozásához segítettek.

(1) Adott $(\sigma_t^\varphi)_{t\in\mathbb{R}}$ moduláris automorfizmus csoporthoz milyen algebrai invariánsokat lehetne rendelni?

(2) Ezek az algebrai invariánsok hogyan függnek a φ hű normális állapottól?

Ezekre a kérdésekre 1973-ban Connes-nak sikerült az osztályozást nagy mértékben előremozdító pozitív választ adnia [2]. Nem a történelmi úton haladva, hanem az utólag egyszerűsített módszereken keresztül nézzük meg Connes gondolatát.

Connes jelölését alkalmazva adott M Neumann-algebra esetén használjuk az

$$S(M) := \bigcap_{\substack{\varphi \text{ hű normális} \\ \text{állapot}}} \{\mathrm{sp}\,(\Delta_\varphi)\}$$

rövidítést, ahol sp jelöli az operátor spektrumát. A definícióból rögtön adódik, hogy $S(M)$ algebrai invariáns, továbbá zárt részhalmaza $\mathbb{R}_0^+$-nak. Ha M Neumann-faktor, akkor a

$$\Gamma(M) := S(M) \setminus \{0\}$$

halmaz az M *Neumann-algebra Connes-spektruma.* (Tetszőleges Neumann-algebrának értelmezhető a Connes-spektruma egy összetettebb definíció segítségével. Mivel a célunk a III. típusú faktorok osztályozása, így a továbbiakban elég lesz, ha csak faktorra definiáljuk a Connes-spektrumot ezen az egyszerűbb módon.)

A III. típusú Neumann-algebrák osztályozása szempontjából döntő fontosságú az alábbi tétel.

Tétel. *Adott M Neumann-faktor esetén a $\Gamma(M)$ halmaz megegyezik valamelyik halmazzal a következők közül:*

(0) $\qquad \Gamma(M) = \{1\},$

(λ) $\qquad \Gamma(M) = \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \lambda \in]0,1[,$

(1) $\qquad \Gamma(M) =]0,\infty[.$

Továbbá, ha M I. vagy II. típusú Neumann-algebra, akkor $\Gamma(M) = \{1\}$.

A tételnek megfelelően az M III. típusú Neumann faktorról azt mondjuk, hogy

(1) III_0 *típusú,* ha $\Gamma(M) = \{1\}$,

(2) III_λ *típusú* valamilyen $0 < \lambda < 1$ valós számra, ha $\Gamma(M) = \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(3) III_1 *típusú,* ha $\Gamma(M) =]0,\infty[$.

Nemtriviális kérdés, hogy adott $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén a III_λ osztályba tartozik-e Neumann-algebra, és ha igen, hány nem izomorf algebra van III_λ-ban.

Az első kérdésre pozitív a válasz. Kovács István [5] cikkében pontos konstrukció olvasható tetszőleges $0 < p < \frac{1}{2}$ valós paraméterhez tartozó $\mathbf{M}_p$ Neumann-algebra előállításáról. Bevezetve a $\lambda = \frac{p}{1-p}$ paramétert igazolható, hogy a Pukánszky által konstruált $\mathbf{M}_p$ Neumann-algebrák hipervéges faktorok és a III_λ osztályba tartoznak. További példák olvashatók III_λ faktorokra például az [1], [7] és [3] művekben. A Neumann-algebrák egy fontos osztályáról, a *csoport Neumann-algebrákról* a [6] cikkben található bevezető jellegű, egyszerűbb bizonyításokat is tartalmazó ismertető.

Az izomorfia erejéig való egyértelműséget a hipervéges algebrák körében Connes bizonyította be a III_1 típus kivételével. Ezt az eredményét Fields-éremmel is elismerték. Pár évvel később Haagerupnak sikerült a III_1 esetre is bebizonyítani az egyértelműséget [4].

Legyen M III_λ Neumann-faktor, valamilyen $0 < \lambda < 1$ számra és φ egy hű normális állapot M-en. Ekkor a $(\sigma_t^\varphi)_{t\in\mathbb{R}}$ moduláris automorfizmus csoport segítségével pontosan meg lehet határozni M típusát. Tekintsük a

$$T(M) := \{t \in \mathbb{R} \,|\, \exists u \in M \; : \; uu^* = u^*u = \mathrm{id}_H, \; \forall x \in M \; : \; \sigma_t^\varphi(x) = uxu^*\}$$

halmazt, vagyis azon valós számok halmazát, melyekre σ_t^φ belső automorfizmusa M-nek. Ekkor létezik olyan T pozitív valós szám, hogy $T(M) = T \cdot \mathbb{Z}$. Ez a T szám független a φ hű állapottól, és csak az M-re jellemző mennyiség. Bevezetve a $\lambda := \exp\left(\frac{2\pi}{T}\right)$ jelölést igazolható, hogy M III_λ típusú Neumann-algebra [2].

Irodalomjegyzék

[1] O. Bratteli and D. W. Robinson *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1,* második kiadás, Springer-Verlag (Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo, 1987).

[2] A. Connes, Une classification des facteurs de type *III*, *Ann. Sci. École Norm Sup.*, **6** (1973), 133–252.

[3] Jacques Dixmier, *Von Neumann Algebras,* North-Holland (Amsterdam - New York - Oxford, 1981).

[4] Uffe Haagerup, Connes bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III_1, *Acta Math.*, **158** (1987), 95–148.

[5] Kovács István, Pukánszky Lajos és a faktorok elmélete, *Matematikai Lapok,* **3–4** (1996), 28–39.

[6] Petz Dénes, Lokálisan kompakt csoportok: csoport Neumann-algebra és dualitás, *Matematikai Lapok,* **29** (1981), 329–344.

[7] V. S. Sunder, *An invitation to von Neumann Algebras,* Springer-Verlag (New York - Berlin - Heidelberg - London - Paris - Tokyo, 1986).

[8] M. Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert-algebras and its applications,* Lecture Notes in Mathematics, **128**, Springer-Verlag (Berlin - Heidelberg - New York, 1970).

[9] M. Tomita, *Quasi-standard von Neumann algebras,* nem publikált.

Andai Attila

BME TTK Analízis Tanszék

e-mail: andaia@math.bme.hu

Attila Andai: Classification of type III von Neumann algebras

We get a nearer view of classification of type III von Neumann algebras. It took long decades since Neumann's and Murray's first classification of von Neumann algebras to understand the hyperfinite factors of type III. The crucial breakthrough was done by Tomita, his theorem introduces an unexpected element into the theory of Neumann-algebras, namely the one-parameter modular automorphism group. Connes managed to introduce a new algebraic invariant of factors, the Connes' spectrum, by the help of the modular group. This article explains roughly the main idea behind Tomita's theorem, sketches the construction of Connes' spectrum, demonstrates how to introduce factors of type III_λ ($\lambda \in [0,1]$) and mentions the main uniquness theorems about these factors.

A RÉNYI-FÉLE KEVERÉS KÉT ÚJ PÉLDÁJA*

CSÖRGŐ SÁNDOR

Az eredeti eredmények részletes ismertetése után megmutatjuk, hogy két klasszikus határeloszlás-tétel Rényi-keverő módon is igaz. Az egyik a független, egyforma eloszlású véletlen változók pozitív összegeinek számára vonatkozó általánosított arcus-sinus törvény Spitzer szükséges és elegendő feltétele, a másik pedig ezen összegek egy korlátos halmazban tett látogatásainak számára vonatkozó határeloszlás-tétel Darling és Kac szükséges és elegendő feltétele teljesülése esetén. A Rényi-féle keverésből azután általánosított arcus-sinus tételekre következtetünk abban az esetben, amikor a játékok száma is véletlen, illetve látogatási idők számára vonatkozó olyan Darling–Kac tipusú tételekre, amikor a bolyongás véletlen számú lépésben történik, továbbá arra, hogy az eredeti tételek független változókról kiterjeszthetők Révész-függő véletlen változókra is.

1. Bevezetés

Rényi [27], majd Rényi és Révész [30] nyomán azt mondjuk, hogy véletlen változóknak egy $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn adott $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozata keverő a $H(\cdot)$ határeloszlás-függvénnyel, ha bármely $E \in \mathcal{E}$ eseményre $\mathbb{P}\{\{\xi_n \leq x\} \cap E\} \to H(x)\mathbb{P}\{E\}$ teljesül H minden $x \in \mathbb{R}$ folytonossági pontjában az $\mathbb{R}$ valós egyenesen, ahol, és a dolgozatban mindvégig, egy nem specifikált konvergencia reláció fennállása arra vonatkozik, amint $n \to \infty$. Hogy a fogalmat tisztán elválasszuk a keverés sok más értelmétől, ahol a szó használata jobban elterjedt, *Rényi-keverésként* fogunk rá hivatkozni. Mivel azt feltesszük, hogy itt H nem (egy pontban egységnyit ugró) degenerált eloszlásfüggvény, a $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat Rényi-keverő volta többet kíván az $E = \Omega$ választásra adódó szokásos határeloszlás meglétén. Valóban, Rényi [27] keverése saját karakterizációjának megfelelően, amely [28] és [29] könyveiben is megtalálható, ez akkor és csak akkor történik, ha a $\mathbb{P}\{\xi_n \leq x\} \to H(x)$ konvergencia mellett $\mathbb{P}\{\{\xi_n \leq x\} \cap \{\xi_k \leq x\}\} \to H(x)\mathbb{P}\{\xi_k \leq x\}$ is teljesül H minden x folytonossági pontjában, bármely rögzített $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ esetén.

Önmagából fakadó érdekességén túl, egy határeloszlás-tétel Rényi-keverő általánosításának egyik motivációja az, hogy az illető tételt megőrizhessük abban az

*Work partially supported by the U.S. National Science Foundation, Grant DMS–96-25732 held at The University of Michigan.

esetben, ha a $\mathbb{P}$ valószínűségi mértéket egy olyan $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ valószínűségi mértékre cseréljük, amely $\mathbb{P}$-re nézve abszolút folytonos. Az is kiderült, hogy egy határeloszlás-tételben fennálló Rényi-keverés pontosan az a körülmény, amelynél lehetőség nyílik arra, hogy a szóbanforgó tételt az eredeti véletlen sorozat véletlenül választott részsorozataira is átvigyük; lásd például az [6], [7], [8], [9], [1], [32] dolgozatokat és ezek számos hivatkozását. Mindkét típusú következménnyel fogunk a jelen dolgozatban folglalkozni, a tárgyalandó általánosított arcus-sinus és okkupációs időkre vonatkozó tételek összefüggésében. A jelen dolgozat témájában mindössze Dzhamirzaev [15] cikke ismeretes, ennek tárgyalására alább majd kitérünk.

2. Spitzer általánosított arcus-sinus törvénye

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, egyforma eloszlású véletlen változók az $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn és jelölje $F(x) := \mathbb{P}\{X \leq x\}$, $x \in \mathbb{R}$, a közös eloszlásfüggvényt. Vezessük be az $S_j := X_1 + \cdots + X_j$ részletösszegeket, $j \in \mathbb{N}$, és jelölje $I(E)$ az $E \in \mathcal{E}$ esemény indikátorát, tehát $I_\omega(E)$ minden $\omega \in \Omega$ esetén értelmezett, mégpedig $I_\omega(E) = 1$ ha $\omega \in E$ és $I_\omega(E) = 0$ ha $\omega \notin E$. Ekkor $\sum_{j=1}^{n} I(S_j > 0)$ az a szám, ahányszor az első n részletösszeg meglátogatja a pozitív félegyenest, avagy a pozitív félegyenes okkupációinak a száma. Szokásos erre úgy is gondolni, mint n játék közül azoknak a számára, amikor az $S_1, \dots, S_n$ halmozott „nyereményekkel” bíró játékos (a nyeremények persze veszteségek is lehetnek) előnyben van ellenfelével szemben, tehát azon időpontok száma $1, 2, \dots, n$ közül, amikor játékosunk vezet.

A nevezetes arcus-sinus törvényt Lévy [24] fedezte fel, aki az alábbi (2.2) határeloszlás-tételt a pénzdobálás speciális esetében állította bizonyítás nélkül a $\rho = \frac{1}{2}$ esetre, vagyis amikor $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ a legegyszerűbb szimmetrikus, az $S_0 := 0$ pontból induló véletlen bolyongás, tehát ha $\mathbb{P}\{X = 1\} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\{X = -1\}$, annak utána, hogy belátta, miszerint azon pontok által alkotott halmaz Lebesgue mértékének eloszlásfüggvénye, ahol egy standard Brown mozgás pozitív a $[0, 1]$ intervallumon az alábbi $G_{1/2}(\cdot)$. (Takács [37] mesterien analizálja Lévy heurisztikus gondolatmenetét, számos változattal és kiterjesztéssel együtt, és kijelöli annak korlátait.) Szabatosan ezt először Erdős és Kac [18] bizonyították be, azonnal messze kiterjesztve Lévy állítását arra az esetre, amikor $\mathbb{E}(X) = 0$ és $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, ahol $\mathbb{E}(\cdot) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\cdot)$ a $\mathbb{P}$-re vonatkozó várható értéket jelöli. Érdekes történeti megjegyzés, hogy Erdős és Kac [18] nevezetes módszere, az „invariancia elv” (amely általában jobban ismert egy évvel korábbi [17] dolgozatukból), megkívánja, hogy egy konkrét eloszlásra a határeloszlást meghatározzuk, és akkor ez öröklődik minden olyan esetre, amikor $\mathbb{E}(X) = 0$ és $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Erre nyilván a Lévy-féle speciális eset, az egyszerű szimmetrikus bolyongás esete tűnik valóban a legegyszerűbbnek, azonban Erdős és Kac [18], feltehetően azért, hogy Lévyvel ne kerüljenek konfliktusba, ezt a Laplace eloszlás esetére csinálták meg, amikor is X eloszlása folytonos az $e^{-|x|}/2$, $x \in \mathbb{R}$, sűrűségfüggvénnyel. Hogy valóban ez volt-e az okuk, sajnos már soha nem tudhatjuk meg.

A jelenség megértését azután alapvetően gazdagította Chung és Feller az úgynevezett diszkrét arcus-sinus szabály, tehát $\sum_{j=1}^{n} I(S_j > 0)$ pontos eloszlásának megtalálásával a pénzdobálás esetére, amely megtalálható Feller [19] könyvében, ahol ez a tőle eredő, de későbbi kombinatorikus módszer segítségével van bizonyítva. Eredetileg Chung és Feller generátorfüggvényekkel dolgoztak, Feller [19] könyvének első, 1950-ben megjelent kötetét először éppen azért dolgozta át, hogy az 1957-ben kiadott második kiadásban már a diszkrét arcus-sinus szabály kombinatorikus bizonyítása szerepeljen; az utóbbi Rényi [28] könyvében is megtalálható.

Erdős és Kac [18] tétele után ugyanakkor maga az arcus-sinus törvény olyan „második momentumos" határeloszlás-tételnek tűnt, amellyel kapcsolatban lényeges újítás már nehezen volt képzelhető. Ezért szenzációnak számított, amikor Sparre Andersen [33] egy cikksorozat kulminációjaként bebizonyította, hogy amennyiben $\mathbb{P}\{S_n > 0\} \to \rho$ valamely $\rho \in (0,1)$ szám esetén, akkor az alábbi (2.2) határeloszlás-tétel már minden további feltétel nélkül fennáll. Hamarosan ezután a vezetési idők száma $\sum_{j=1}^{n} I(S_j > 0)/n$ részarányának vizsgálata Spitzer [34] végső általánosított arcus-sinus törvényében tetőződött: Bevezetve a

$$g_\rho(x) := \frac{\sin(\rho\pi)}{\pi} \frac{1}{x^{1-\rho}(1-x)^\rho} = \frac{x^{\rho-1}(1-x)^{[1-\rho]-1}}{\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho)}, \quad 0 \le x \le 1,$$

sűrűségfüggvényeket, ahol $\Gamma(s) := \int_0^\infty u^{s-1}e^{-s}ds$, $s > 0$, a szokásos gamma függvény, a részaránynak akkor és csak akkor van nem-degenerált határeloszlása, ha

$$\text{(2.1)} \qquad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\{S_j > 0\} \to \rho \quad \text{valamely } \rho \in (0,1) \text{ esetén,}$$

és ha ez a feltétel teljesül a $\rho \in (0,1)$ számra, akkor

$$\text{(2.2)} \qquad \mathbb{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(S_j > 0) \le x\right\} \to G_\rho(x) := \int_0^x g_\rho(y)\,dy, \quad 0 \le x \le 1,$$

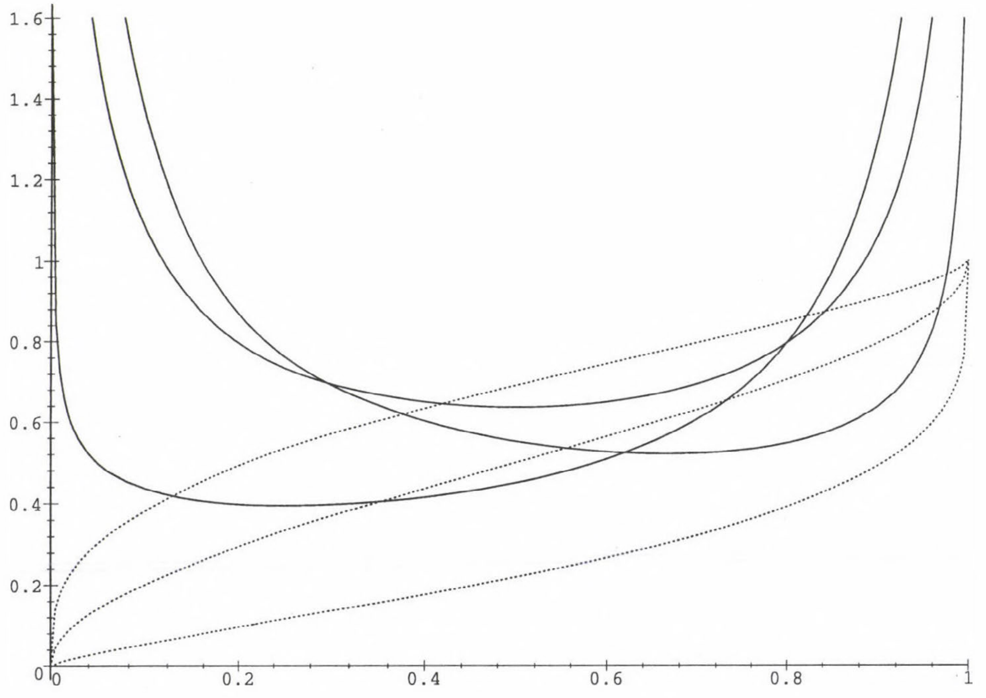
vagyis a határeloszlás a $\mathrm{Beta}(\rho, 1-\rho)$ eloszlás, és akármelyik $r \in \mathbb{N}$ esetén

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{aligned} \int_0^1 x^r g_\rho(x)\,dx = \frac{\Gamma(r+\rho)}{\Gamma(r+1)\Gamma(\rho)} &= \frac{\rho(\rho+1)\cdots(\rho+r-1)}{r!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(S_j > 0)\right]^r\right) \end{aligned}$$

az r-dik momentumok limeszére. Az eredeti arcus-sinus törvény a $\rho = 1/2$ esetben következik be, amikor is

$$G_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Az utóbbi triviálisan adódik ha $F(\cdot)$ *bármilyen* olyan, az egész $\mathbb{R}$ egyenesen folytonos eloszlásfüggvény, amelyre $F(-x) = 1 - F(x)$ minden $x \geq 0$ esetén, mivel ekkor S_n is szimmetrikusan oszlik el a nulla körül, és így minden $n \in \mathbb{N}$ egészre $\mathbb{P}\{S_n > 0\} = 1/2$. A $\rho = 1/2$ esetben az 1. ábra mutatja, hogy aszimptotikusan mennyivel nagyobb annak a valószínűsége, hogy a két játékos valamelyike nagyon vezet, mint annak, hogy csak kicsivel (de helyzetük szimmetrikus), és a $\rho = 3/4$ vagy a $\rho = 1/3$ esetekben azt is, hogy miként ferdül ez a helyzet el az egyik vagy a másik javára.



1. ábra. A $g_{3/4}(x)$, $g_{1/2}(x)$, $g_{1/3}(x)$ sűrűségfüggvények $G_{3/4}(x)$, $G_{1/2}(x)$, $G_{1/3}(x)$ eloszlásfüggvényeikkel, $0 \leq x \leq 1$.

Tekintve, hogy a $\sum_{j=1}^{n} I(S_j > 0)/n$ részarányok korlátosak (és így, amennyiben valamilyen nem-degenerált határeloszlásuk létezik, momentumaik is szükségképpen konvergálnak ennek a határeloszlásnak a megfelelő momentumaihoz), a (2.1) feltétel, amely a (2.3) konvergencia speciális esete ha $r = 1$, triviálisan szükséges. Spitzer tételének bizonyítása a nem-triviális irányban is a momentummódszerre épül: minthogy a (2.3) alatti momentumok $\{\rho(\rho+1)\cdots(\rho+r-1)/r!\}_{r=1}^{\infty}$ sorozata egyértelműen meghatározza a $\mathrm{Beta}(\rho, 1-\rho)$ eloszlást, (2.2) belátásához elegendő azt ellenőrizni, hogy a (2.3) konvergencia minden $r \in \mathbb{N}$ esetén teljesül ha (2.1) fennáll. Az ellenőrzés direkt véghezvitele (ahogy Spitzer [34] eredetileg csinálta), vagy az $m_n(r+1) = nm_n(r) - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}\{S_{n-i} > 0\} m_i(r)$, $n \in \mathbb{N}$, $r = 0, 1, \ldots$, rekurziós összefüggésnek az $m_n(r) := \mathbb{E}\big(\big[n - \sum_{j=1}^{n} I(S_j > 0)\big]^r\big) = \mathbb{E}\big(\big[\sum_{j=1}^{n} I(S_j \leq 0)\big]^r\big)$ momentumokra történő felállítása (amiből (2.3) már könnyebben következik, ahogyan Spitzer [35], p. 232, később javasolta) már mélyebb fluktuációs eredményeken múlik; további bizonyításokra nézve lásd még Bingham, Goldie és Teugels [2] könyvét és legújabban Getoor és Sharpe [20] dolgozatát.

Visszatérve a (2.1) feltételre, a $\rho = 1/2$ eset aszimmetrikus eloszlásokra is előfordul a (2.1) és így a (2.2) relációkban. Ez történik például valahányszor F egy szimmetrikus, $\alpha \in (0, 2]$ kitevős stabilis eloszlás vonzástartományában van zérus centralizáló sorozattal; ezt a feltételt részletesen vizsgáljuk a következő szakaszban. Az nem volt világos 1956-ban, amikor [34] megjelent, hogy vannak-e olyan F-ek, amelyekre a (2.1)-beli átlagok nem konvergálnak; ilyeneket Spitzer [35] később szerkesztett. Ugyanakkor általában minden egyes $\rho \in [0, 1]$ esetén megkonstruálható F eloszlásfüggvények egy olyan családja, amelyre a (2.1)-beli konvergencia fennáll, ahol a $\rho = 0$ és $\rho = 1$ szélső esetek (2.2)-ben aszimptotikusan degenerált határeloszlásokra vezetnek. Sőt, minden $\rho \in (0, 1)$ elérhető (2.1)-ben már olyan F-ek családjával is, amelyek egy alkalmas stabilis eloszlás vonzástartományában vannak, de a teljesen aszimmetrikus esetektől eltekintve F-nek nem kell vonzástartományban lenni ahhoz, hogy (2.1) teljesüljön. Spitzer (2.1) feltételének analízise nehéz és még távolról sem teljes, az érdekesebb eredmények Emery [16], Doney [13, 14], valamint Bingham és Hawkes [3] nevéhez fűződnek, ezek rövid tárgyalására nézve lásd a [2] könyv 379–380 és 396–397 oldalait is. Talán a legérdekesebb nyitott kérdés az, hogy teljesülhet-e (2.1) anélkül, hogy a $\mathbb{P}\{S_n > 0\}$ valószínűségek már maguk is konvergálnának ρ-hoz, vagyis az, hogy Spitzer tétele tényleg általánosabb-e Sparre Andersen [33] eredeti tételénél.*

A (2.2) eredmény diszkusszióját most egy egyszerű, de fontos észrevétellel folytatjuk, ami magának a tételnek éppen azon lényegére utal, amelyen a negyedik szakaszban kimondott keverési általánosítás is múlik.

Ha a szükséges (2.1) feltétel teljesül, akkor persze $F(\cdot)$ nem lehet degenerált. Ekkor az S_n összeg koncentrációfüggvényére vonatkozó ismert becslésekből

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\{-y < S_j \leq y\} \leq C_F\, y \sqrt{n}, \qquad y > 0, \tag{2.4}$$

valamilyen F-től függő C_F konstanssal; ez egyenesen következik például Kesten [22] dolgozatának 1. korolláriumából. Ezért

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\{-y < S_j \leq 0\} \to 0 \quad \text{és} \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\{0 < S_j \leq y\} \to 0 \tag{2.5}$$

---

*A jelen dolgozat sajtó alá rendezése közben vettem észre, hogy erre a kérdésre a válasz már a cikk megírásakor nemleges volt: R. A. Doney, Spitzer's condition and ladder variables in random walks, *Probability Theory and Related Fields*, **101** (1995), 577–580.

bármely $y > 0$ esetén, vagy, ami ugyanaz, a (2.1) feltétel maga után vonja, hogy $n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}\{S_j > y\} \to \rho$ akármilyen rögzített $y \in \mathbb{R}$ számra. Ebből a Markov egyenlőtlenség segítségével bármely pozitív y szám választásánál az adódik, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(-y < S_j \le 0) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{és} \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(0 < S_j \le y) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

ahol $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ a sztochasztikus konvergenciát jelöli. Ezáltal látható, hogy Spitzer (2.1) feltétele valójában azt is maga után vonja, hogy

$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(S_j > y) \le x\right\} \to G_\rho(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2.6}$$

minden rögzített $y \in \mathbb{R}$ számra.

Végül megjegyezzük, hogy az eredeti tételhez hasonlóan a jelen dolgozat negyedik szakaszának keverési eredménye nem-negatív összegek $\sum_{j=1}^{n} I(S_j \ge 0)/n$ részarányára is ugyanúgy érvényes, mint pozitív összegekéire; ez azért van, mert $n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}\{S_j = 0\} \to 0$ minden F esetén. Ez viszont a Kronecker-féle lemma segítségével azonnal következik abból a tényből, aminek bizonyítása Feller [19] második kötetében található, miszerint $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}\mathbb{P}\{S_j = 0\} < \infty$ bármely F-re.

3. Darling és Kac határeloszlás-tétele bolyongások látogatási számaira

Mint az előző szakaszban, $X_1, X_2, \ldots$ független, egyforma eloszlású véletlen változók az $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn a közös $F(x) := \mathbb{P}\{X \le x\}$, $x \in \mathbb{R}$, eloszlásfüggvénnyel és $S_j := X_1 + \cdots + X_j$ részletösszegekkel, $j \in \mathbb{N}$. A többi ottani jelölést is megtartva, tekintsük az eloszlás zárt S_F tartóhalmazát, azaz legyen $S_F := \{x \in \mathbb{R} : F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0 \text{ bármely } \varepsilon > 0 \text{ esetén}\}$. A jelen dolgozatban akkor mondjuk, hogy X rácsos eloszlású $h \in (0,\infty)$ nyílással, ha $0 \in S_F \subset \{lh : l \in \mathbb{Z}\}$, ahol $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ az egész számok halmaza, és $S_F \not\subset \{lc : l \in \mathbb{Z}\}$ semmilyen $c > h$ számra. (Amennyiben ez eredetileg nem teljesülne, a $0 \in S_F$ feltétel konstans eltolással elérhető.) Attól függően, hogy X rácsos eloszlású vagy nem, a következő alternatív jelentéssel felruházva bevezetjük $\mathbb{R}$ részhalmazainak egy $\mathcal{B}^*$ osztályát: a rácsos esetben $\mathcal{B}^*$ az $\{lh : l \in \mathbb{Z}\}$ rács összes nem-üres *véges* részhalmazának az osztályát fogja jelölni, míg a nem-rácsos esetben, ha $\lambda(\cdot)$ az egydimenziós Lebesgue mérték és ∂B jelöli egy $B \subset \mathbb{R}$ halmaz határát, $\mathcal{B}^*$ az összes olyan *korlátos* $B \subset \mathbb{R}$ Borel-mérhető halmaz osztályát fogja jelölni, amelyre $\lambda(B) > 0 = \lambda(\partial B)$. Az alternatív jelentésnek megfelelően, ha $B \in \mathcal{B}^*$, akkor a rácsos esetben $|B|$ jelöli a B halmaz elemeinek a számát, a nem-rácsos esetben pedig $|B| := \lambda(B)$.

Most $\sum_{j=1}^{n} I(S_j \in A)$ az $S_0 := 0$ pontból induló $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ véletlen bolyongásnak az első n lépés során az $A \in \mathcal{B}^*$ halmazban tett látogatásai száma, amelyet *okkupációs* időnek is szokás nevezni; ebben a nyelvhasználatban az előző pont

$\sum_{j=1}^{n} I(S_j > 0)$ összege a pozitív félegyenes okkupációs ideje n lépés során. Amint ez szokásos, akkor mondjuk, hogy pozitív számok egy $\{L(n)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozata *lassú változású* a végtelennél, ha $L(\lfloor cn \rfloor)/L(n) \to 1$ minden $c > 0$ konstansra, ahol $\lfloor \cdot \rfloor$ a szokásos egész részt jelöli. Ekkor, Karamata hatványsorokra vonatkozó tételét ([2], p. 40) az eredeti eredményre alkalmazva Darling és Kac [12] 5. tételéből következik, hogy adott $A \in \mathcal{B}^*$ halmaz esetén akkor és csak akkor létezik olyan $a_n \to \infty$ számsorozat, hogy a $\sum_{j=1}^{n} I(S_j \in A)/a_n$ véletlen sorozatnak nem-degenerált határeloszlása legyen, ha

$$(3.1) \qquad \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\{S_j \in A\}}{n^{\kappa} L(n)} \to |A| \quad \text{valamely } \kappa \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right] \text{ és lassú változású } \{L(n)\}$$

esetén, ahol $n^{\kappa} L(n) \to \infty$, és ebben az esetben

$$(3.2) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} I(S_j \in A)}{\Gamma(\kappa+1)\,|A|\,n^{\kappa} L(n)} \le x \right\} = H_{\kappa}(x), \quad x \ge 0,$$

ahol $H_{\kappa}(\cdot)$ a κ-rendű Mittag–Leffler eloszlásfüggvény, melyet mindjárt bevezetünk.

Az eredeti Darling–Kac elmélet, amely Bingham, Goldie és Teugels [2] könyvében is ismertetésre kerül, Markov-folyamatok egy tág osztályára érvényes, és általános szükséges és elegendő feltételük a jelenlegi speciális bolyongási helyzetre alkalmazva minden $\kappa \in [0, 1)$ értéket megengedne (3.1)-ben és ugyanakkor megkívánná, hogy (3.1) helyett fennáljon a

$$\sup_{y\in A} \left| \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\{S_j \in A - y\}}{n^{\kappa} L(n)} - |A| \right| \to 0$$

egyenletes konvergencia, ahol $B \pm y := \{b \pm y : b \in B\}$, $B \subset \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Azonban Kesten [21] kimutatta, hogy a kívánt egyenletesség *minden* bolyongásra automatikusan teljesül, valamint azt is, hogy a (2.4) egyenlőtlenség, tekintettel az $A \in \mathcal{B}^*$ halmaz korlátos voltára, persze a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ intervallumra szorítja κ értékét. Mivel a szóbanforgó egyenletességgel egy olyan jelenség is kapcsolatos, amely a tétel lényegének megértéséhez a Rényi-keverés szempontjából megintcsak alapvetően fontos, erre az alábbi lemmában még visszatérünk.

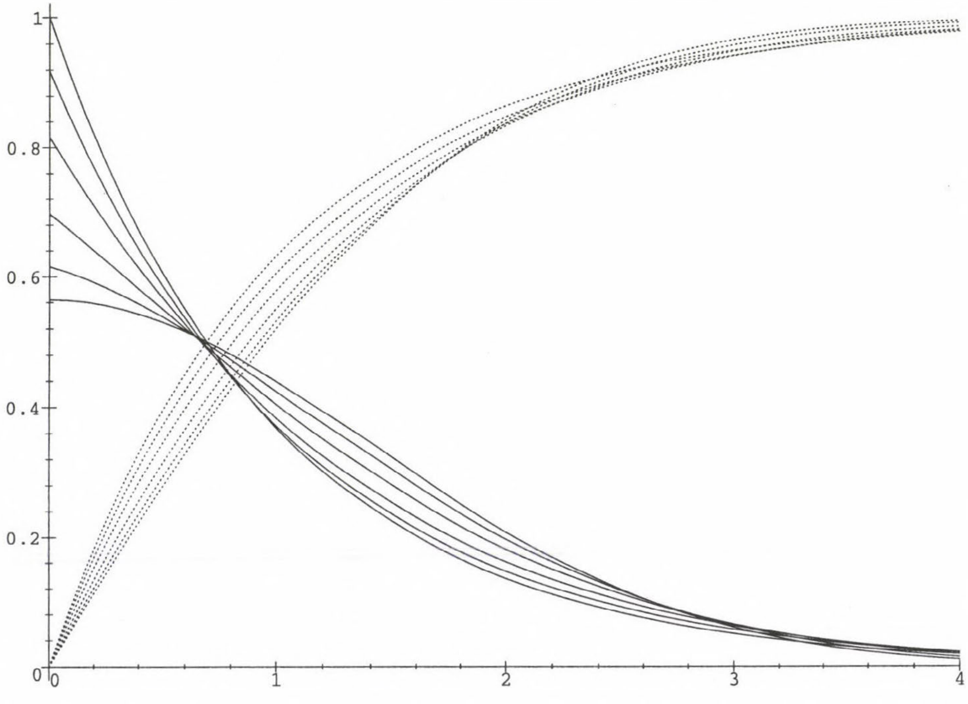
Tekintsük mostmár a κ-rendű Mittag–Leffler sűrűségfüggvényt, amelyet a

$$h_{\kappa}(x) := \frac{1}{\kappa\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}\Gamma(\kappa j+1)\sin(\kappa\pi j)}{j!} x^{j-1}, \quad x \ge 0,$$

formula definiál, ahol $\sin(0)/0 := 1$. Ekkor a κ-rendű Mittag–Leffler eloszlásfüggvény

$$H_{\kappa}(x) := \int_0^x h_{\kappa}(y)\,dy = \frac{1}{\kappa\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}\Gamma(\kappa j+1)\sin(\kappa\pi j)}{j!\,j} x^{j}, \quad x \ge 0,$$

bármely $\kappa \in [0,1)$ esetén. A paraméter minket érdeklő $\kappa \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ értekeire a $h_\kappa(\cdot)$, $\kappa \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, sűrűségfüggvények az 1 várható értékű $h_0(x) = e^{-x}$ exponenciális sűrűségfüggvényt „kötik össze" a $h_{\frac{1}{2}}(x) = e^{-x^2/4}/\sqrt{\pi}$, $x \geq 0$, sűrűségfüggvénnyel, amely egy 0 várható értékű és $\sqrt{2}$ szórású normális eloszlású véletlen változó abszolút értékének a sűrűségfüggvénye. A 2. ábra a $h_\kappa(x)$ sűrűségfüggvényeket ábrázolja a hozzájuk tartozó $H_\kappa(x)$ eloszlásfüggvényekkel, $0 \leq x \leq 4$, a $\kappa = 0, \frac{8}{64}, \frac{16}{64}, \frac{24}{64}, \frac{29}{64}, \frac{1}{2}$ paraméterekre. Mivel a $h_\kappa(0)$ értékek 1-ről a $1/\sqrt{\pi} \approx 0.564$ értékre csökkennek, amint κ 0-ról $\frac{1}{2}$-re nő, a görbéket könnyű szemmel azonosítani.



2. ábra. A $h_0(x)$, $h_{\frac{8}{64}}(x)$, $h_{\frac{16}{64}}(x)$, $h_{\frac{24}{64}}(x)$, $h_{\frac{29}{64}}(x)$, $h_{\frac{1}{2}}(x)$ sűrűségfüggvények $H_0(x)$, $H_{\frac{8}{64}}(x)$, $H_{\frac{16}{64}}(x)$, $H_{\frac{24}{64}}(x)$, $H_{\frac{29}{64}}(x)$, $H_{\frac{1}{2}}(x)$ eloszlásfüggvényeikkel, $0 \leq x \leq 4$.

A Mittag–Leffler eloszlások neve abból az érdekes tényből származik, hogy a $\int_0^\infty e^{-sx} h_\kappa(x)\,dx = \sum_{j=0}^\infty (-s)^j / \Gamma(\kappa j + 1)$, $s \geq s_\kappa$, Laplace-transzformált nem egyéb, mint a komplex analízis Mittag–Leffler függvénye, ahol $s_0 = -1$ és $s_\kappa = -\infty$ ha $\kappa \in (0,1)$. Pollard [25] állításának megfelelően, ezeket az eloszlásokat először Feller vezette be a valószínűségelméletbe; számos további alkalmazása megtalálható a [2] könyvben. Az eloszlások momentumaira az $\int_0^\infty x^r h_\kappa(x)\,dx = r!/\Gamma(\kappa r + 1)$, $r \in \mathbb{N}$, formulák állnak fenn, és Darling és Kac [12] bizonyítása szintén a momentum-módszerre épül; a bolyongás jelenlegi speciális esetére ez a bizonyítás lényegesen nem egyszerűsödik.

Visszatérve az egyenletesség fent említett kérdéséhez, most olyan részletek bizonyítását adjuk meg, amelyek Kesten [21] dolgozatában csak impliciten szerepelnek, számunkra azonban jelenleg fontosak; Kesten mindössze annyit említ, hogy a kívánt egyenletesség (ami alább a $B = A$ választással adódik) automatikusan következik Stone [36] 1. korolláriumából.

Lemma. *Ha* (3.1) *teljesül valamely* $A \in \mathcal{B}^*$ *halmazra, akkor ugyanarra a* κ *számra és* $\{L(n)\}$ *sorozatra*

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\{S_j \in B + x\}}{n^{\kappa} L(n)} - |B| \right| \to 0$$

bármely $B \in \mathcal{B}^*$ *halmazra, ahol a rácsos esetben* $K \in \mathcal{B}^*$ *tetszőleges, a nem-rácsos esetben pedig* $K \subset \mathbb{R}$ *tetszőleges kompakt halmaz.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (3.1) teljesül az $A \in \mathcal{B}^*$ halmazra, $C \in \mathcal{B}^*$ és $j \in \mathbb{N}$ esetén vezessük be a $p_j(C) := \mathbb{P}\{S_j \in C\}$ jelölést, tekintsünk egy tetszőleges $B \in \mathcal{B}^*$ halmazt és legyen K olyan, mint a lemma állításában.

Ha az alapul vett eloszlás nem-rácsos, akkor az $S_F - S_F := \{x - y \,:\, x, y \in S_F\}$ algebrai különbséghalmaz által generált additív csoport az egész $\mathbb{R}$ valós egyenes, és így Stone [36] dolgozatának főfeltétele teljesül. Ez a főfeltétel a rácsos esetben a $0 \in S_F$ feltétel miatt áll fenn. Ezért Stone [36] 1. korolláriumából következik, hogy bármely pozitív ε-hoz létezik olyan $j_*(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{p_j(B + x)}{p_j(A)} - \frac{|B|}{|A|} \right| \leq \varepsilon$$

ha $j \geq j_*(\varepsilon)$, feltéve, hogy $\limsup_{n \to \infty} [p_n(C)]^{1/n} = 1$ valamely kompakt C halmazra (amely a rácsos esetben, amikor a kívánt egyenletesség egyébként is triviális, tetszőleges $C \in \mathcal{B}^*$ halmazt jelent).

Feltéve, hogy az utóbbi feltétel valóban teljesül, ekkor bármely $\varepsilon > 0$ és $n > j_*(\varepsilon) =: j_*$ mellett

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j(B + x)}{n^{\kappa} L(n)} - |B| \right| \leq$$

$$\leq \frac{\sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in K} \left| \frac{p_j(B+x)}{p_j(A)} - \frac{|B|}{|A|} \right| p_j(A)}{n^{\kappa} L(n)} + |B| \left| \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j(A)}{|A| \, n^{\kappa} L(n)} - 1 \right| \leq$$

$$\leq \frac{\sum_{j=1}^{j_*-1} \sup_{x \in K} \left| \frac{p_j(B+x)}{p_j(A)} - \frac{|B|}{|A|} \right| p_j(A)}{n^{\kappa} L(n)} + \varepsilon \frac{\sum_{j=j_*}^{n} p_j(A)}{n^{\kappa} L(n)} + |B| \left| \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j(A)}{|A| \, n^{\kappa} L(n)} - 1 \right|,$$

és ezek az egyenlőtlenségek a (3.1) feltétel segítségével a lemma állítását már maguk után vonják.

Stone feltételét a (3.1) feltételből kétféle módon is levezetjük. Az első bizonyításban két esetet különböztetünk meg.

Ha $\kappa > 0$, akkor $L(n)$ nem szükségképpen tart a végtelenbe, de [2] 1.3.6. propozíciójának megfelelően mindenképpen teljesül, hogy $[\log L(n)]/\log n \to 0$. Legyen $u_n := |A|n^{\kappa}L(n)$ és $v_n := 1/\log n$ ha $n \geq 2$. Ekkor $\sum_{j=\lceil u_n v_n \rceil}^{n} p_j(A)/u_n \to 1$, ahol minden valós x-re $\lceil x \rceil = \min\{j \in \mathbb{Z} : j \geq x\}$, és ezért ha bevezetjük azt a $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ részsorozatot, amelyre $n \geq 2$ esetén $p_{k_n}(A) = \max_{\lceil u_n v_n \rceil \leq j \leq n} p_j(A)$, akkor $\liminf_{n\to\infty} \left[np_{k_n}(A)/u_n\right]^{1/k_n} \geq 1$. Mivel $n^{1/k_n} \leq \exp(\log^2 n/u_n)$ és $u_n^{1/k_n} \leq \exp\left([\log n][\log u_n]/u_n\right)$, ebből látjuk, hogy $\left[p_{k_n}(A)\right]^{1/k_n} \to 1$. Ezért aztán valamilyen kompakt $C \in \mathcal{B}^*$ halmazra $\limsup_{n\to\infty} \left[p_n(C)\right]^{1/n} = 1$.

Ha $\kappa = 0$, akkor a (3.1) feltétel fontos része az, hogy $L(n) \to \infty$. Ekkor van olyan pozitív $\{\ell(n)\}$ sorozat, amely a végtelenben lassú változású, $\sum_{j=1}^{n} p_j(A) = \ell(n) \to \infty$ és $p_n(A) = \ell(n) - \ell(n-1) \geq 0$ minden elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$ számra. A [2] könyv 1.9.7. és 1.9.8. tételei, valamint az utánuk következő diszkusszió szerint így érvényes az $\ell(n) \equiv c\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k/k\right)$ reprezentáció, ahol $c > 0$ valamilyen konstans, $\{\delta_n\}$ pedig olyan számsorozat, amelyre $\delta_n \to 0$, és minthogy $\ell(n)/\ell(n-1) = \exp(\delta_n/n) \geq 1$, azt is látjuk, hogy $\delta_n \geq 0$ ha n elég nagy. Sőt, mivel $\left[\ell(n-1)\right]^{1/n} = \exp\left(\left[\log \ell(n-1)\right]/n\right) \to 1$, érvényesek a $p_n(A) = \left[\ell(n) - \ell(n-1)\right]^{1/n} = \left[\ell(n-1)\left\{\exp(\delta_n/n) - 1\right\}\right]^{1/n} \sim (\delta_n/n)^{1/n} \sim (\delta_n)^{1/n} = \exp\left(-\left[\log(1/\delta_n)\right]/n\right)$ aszimptotikus egyenlőségek, és ezért $\delta_n > 0$ ha n elég nagy. Így aztán $1/\delta_n \to \infty$. Azt könnyű látni, hogy $\liminf_{n\to\infty} \left[\log(1/\delta_n)\right]/n = 0$; különben az $\ell(n) \to \infty$ feltételnek ellentmondóan az lenne, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k/k = \infty$. Ezért $\limsup_{n\to\infty} \left(p_n(A)\right)^{1/n} = 1$, és így ugyanez igaz az A halmazt tartalmazó valamely C kompakt halmazra is.

A fenti, két esetet megkülönböztető direkt bizonyításnál jóval egyszerűbb a következő indirekt bizonyítás. Először is nyilvánvaló, hogy $\limsup_{n\to\infty} \left[p_n(A)\right]^{1/n} \leq 1$ a (3.1) A halmazára. Ha $\limsup_{n\to\infty} \left[p_n(A)\right]^{1/n} = p$ lenne valamely $p < 1$ számra, akkor bármely $q \in (p, 1)$ esetén az is fennállna, hogy $p_n(A) \leq q^n$ minden elegendően nagy n esetén, amiből meg az következne, hogy $\sum_{j=1}^{\infty} p_j(A) < \infty$, és így, mivel $n^{\kappa}L(n) \to \infty$, az is, hogy a (3.1) alatti tört nullához tart, ellentmondva a (3.1) feltételnek. Ezért (3.1) maga után vonja, hogy $\limsup_{n\to\infty} \left[p_n(A)\right]^{1/n} = 1$, miből következően azt is, hogy $\limsup_{n\to\infty} \left[p_n(C)\right]^{1/n} = 1$ bármely az A halmazt tartalmazó kompakt $C \in \mathcal{B}^*$ halmazra. ■

Akkor mondjuk, hogy F egy $\alpha \in (0, 2]$ kitevős stabilis eloszlás vonzástartományában van *zérus centralizáló sorozattal*, és ekkor azt írjuk, hogy $F \in \mathcal{D}_0(\alpha)$, ha alkalmas $b_n \to \infty$ számsorozat esetén S_n/b_n eloszlásban konvergál egy α karakterisztikus kitevőjű stabilis véletlen változóhoz. Ahogy ezt Kesten [21] megjegyezte és tőle függetlenül Bretagnolle és Dacunha-Castelle [4], pp. 40–44, vázolták, ha $F \in \mathcal{D}_0(\alpha)$ valamely $\alpha \in [1, 2]$ kitevőre, akkor (3.1) is teljesül a $\kappa = (\alpha - 1)/\alpha$ kitevővel. A bizonyítás, amelyet Bingham és Hawkes [3] valamint a [2] könyv 8.11.3. szakasza is vázol, a rácsos és nem-rácsos esetekre külön-külön alkalmazandó lokális határeloszlás-tételeken múlik; ennek a bizonyításnak egy változatát a következő bekezdésben mi is előadjuk. Kesten [21] valamint Bretagnolle és Dacunha–Castelle [4] egyaránt sejtették, hogy a megfordított állítás is érvényes, vagyis azt, hogy ha (3.1) teljesül, akkor $\alpha = 1/(1-\kappa) \in [1,2]$ választásával $F \in \mathcal{D}_0(\alpha)$. Feltéve, hogy $\kappa \in (0,1/2]$, Kesten [21] ezt be is tudta bizonyítani arra a speciális esetre, amikor F szimmetrikus a nulla körül, Bingham and Hawkes [3] pedig egy olyan teljesen aszimmetrikus esetre, amikor $S_F \subset \{-1,0,1,2,\ldots\}$ és $\mathbb{E}(X) = 0$; az utóbbi esetben persze a vonzó, $1/(1-\kappa) \in (1,2]$ kitevős stabilis eloszlás is teljesen aszimmetrikus lesz (ferdeségi paramétere 1). A harmincéves sejtés, amely a [3] cikkben és a [2] könyvben is exponálásra kerül, a maga teljes általánosságában még mindig nyitott. Az a tény, hogy ha (3.1) teljesül valamely $A \in \mathcal{B}^*$ halmazra, akkor igaz minden $A \in \mathcal{B}^*$ halmazra, a kérdésben releváns lehet.

Legyen $Q(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}$, $0 < t \leq 1$, $Q(0) := Q(0+)$ az alapul vett eloszlás kvantilisfüggvénye, $Q_+(\cdot)$ pedig ennek jobbról folytonos változata. Ekkor [10] 3. korolláriuma szerint valamely $\alpha \in [1,2)$ kitevőre akkor és csak akkor áll fenn, hogy $F \in \mathcal{D}_0(\alpha)$, ha van olyan, a nullánál lassú változású $M_*(\cdot)$ függvény a $(0,1)$ intervallumon és olyan $d_1, d_2 \geq 0$, $d_1 + d_2 > 0$, konstansok, hogy $-Q_+(s) = M_*(s)\left[d_1 + o(1)\right]/s^{1/\alpha}$ és $Q(1-s) = M_*(s)\left[d_2 + o(1)\right]/s^{1/\alpha}$, amint $s \downarrow 0$, mely esetben a normáló sorozat $b_n \equiv n^{1/\alpha}M(n) \equiv n^{1/\alpha}M_*(1/n)$ választása lehetséges, és továbbá teljesül az is, hogy $R_n(\alpha) := n^{(\alpha-1)/\alpha}\int_{1/n}^{(n-1)/n} Q(t)\,dt/M(n) \to 0$. Ha pedig $\sigma^2(s) := \int_s^{1-s}\int_s^{1-s}\left[\min(u,v) - uv\right]dQ(u)\,dQ(v)$, $0 < s < 1/2$, akkor a klasszikus normális konvergencia-kritérium egyik kvantilis analogonjaként [10] 1. korolláriuma szerint $F \in \mathcal{D}_0(2)$ akkor és csak akkor, ha tetszőleges $t > 0$ esetén $\lim_{s\downarrow 0}\sqrt{s}\left[|Q_+(st)| + |Q(1-st)|\right]/\sigma(s) = 0$, mely esetben a $\sigma(\cdot)$ függvény a nullánal lassú változású és a $b_n \equiv n^{1/2}M(n) \equiv n^{1/\alpha}\sigma(1/n)$ választása lehetséges, és továbbá teljesül az is, hogy $R_n(2) \to 0$. Amikor $\alpha \in (1,2]$, a kívánt zérus centralizáció elérésére szolgáló $R_n(\alpha) \to 0$ feltétel akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathbb{E}(X) = 0$. Ha tehát valamely $\alpha \in (1,2]$ kitevőre $F \in \mathcal{D}_0(\alpha)$ és $f_\alpha(\cdot)$ jelöli a vonzó stabilis eloszlás sűrűségfüggvényét, akkor Gnyegyenko és Stone lokális határeloszlás-tételeit ([2], p. 351) és Karamata tételének ([2], p. 26) sorozatokra vonatkozó direkt részét használva látható, hogy bármely $A \in \mathcal{B}^*$ halmazra a (3.1) feltétel teljesül, mégpedig a h maximális nyílású rácsos esetben az $L(n) \equiv h\alpha f_\alpha(0)/\left[(\alpha-1)M(n)\right]$, a nem-rácsos esetben pedig az $L(n) \equiv \alpha f_\alpha(0)/\left[(\alpha-1)M(n)\right]$ sorozattal. Azonban ha $F \in \mathcal{D}_0(1)$, akkor ugyanezzel a gondolatmenettel az is látható, hogy szükség van egy megszorításra. A fenti jelölések értelemszerű használatával ez nevezetesen az, hogy a rácsos és nem-rácsos eloszlásokhoz tartozó

$$L(n) \equiv h g_\alpha(0)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kM(k)} \quad \text{és} \quad L(n) \equiv g_\alpha(0)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kM(k)}$$

lassú változású sorozatok a végtelenbe divergáljanak; ezt a megszorított vonzástartományt a $\mathcal{D}_0^*(1)$ szimbólummal jelöljük. Ez az $M_*(\cdot)$ függvényre vonatkozó további feltétel, még akkor is, ha az eloszlás szimmetrikus a nulla körül és így $R_n(1) \equiv 0$, tehát a sejtést a $\kappa = 0$ esetben ennek megfelelően meg kell szorítani.

4. Pozitív összegek számának és a látogatások számának Rényi-keverése

A dolgozat két főeredménye a következő két tételben fogalmazható meg:

1. Tétel. *A* $\left\{\sum_{j=1}^n I(S_j > 0)/n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozat akkor és csak akkor Rényi-keverő valamilyen nem-degenerált határeloszlás-függvénnyel, ha Spitzer (2.1) feltétele teljesül, mely esetben*

$$\mathbb{P}\left\{\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(S_j > 0) \le x\right\} \cap E\right\} \to G_\rho(x)\mathbb{P}\{E\}, \quad 0 \le x \le 1,$$

minden $E \in \mathcal{E}$ *eseményre és*

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n^s}\left[\sum_{j=1}^{n} I(S_j > 0)\right]^s \middle| E\right) \to \frac{\Gamma(s+\rho)}{\Gamma(s+1)\Gamma(\rho)}, \quad s > 0,$$

minden pozitív valószínűségű $E \in \mathcal{E}$ *eseményre.*

2. Tétel. *Egy* $A \in \mathcal{B}^*$ *halmazhoz akkor és csak akkor található olyan* $a_n \to \infty$ *számsorozat, hogy a* $\left\{\sum_{j=1}^n I(S_j \in A)/a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozat Rényi-keverő legyen valamilyen nem-degenerált határeloszlás-függvénnyel, ha Darling és Kac (3.1) feltétele teljesül, mely esetben*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left\{\frac{\sum_{j=1}^n I(S_j \in A)}{\Gamma(\kappa+1)\,|A|\,n^\kappa L(n)} \le x\right\} \cap E\right\} = H_\kappa(x)\mathbb{P}\{E\}, \quad x \ge 0,$$

minden $E \in \mathcal{E}$ *eseményre. Ha ez igaz valamely* $A \in \mathcal{B}^*$ *halmazra, akkor igaz minden* $A \in \mathcal{B}^*$ *halmazra.*

Bizonyítás. A Rényi-keverés definíciójában az $E = \Omega$ választással élve, a (2.1) és a (3.1) feltételek szükségessége következik Spitzer valamint Darling és Kac eredeti tételeiből.

Fordítva, először a 2. tétellel foglalkozva, tegyük fel, hogy (3.1) teljesül valamely $A \in \mathcal{B}^*$ halmazra. Jelölje $a_n := \Gamma(\kappa+1)\,|A|\,n^\kappa L(n)$ a normáló sorozatot, $n \in \mathbb{N}$. Mivel $a_n^{-1}\sum_{j=1}^k I(S_j \in A)$ bármely rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén sztochasztikusan nullához tart, Szlutszkij elemi lemmájából következően a Rényi-keverés Rényi [27, 28, 29] említett karakterizációjának megfelelően elegendő megmutatni, hogy

$$p_{n,k}(x) := \mathbb{P}\left\{\left\{\frac{1}{a_n}\sum_{j=k+1}^{n} I(S_j \in A) \leq x\right\} \cap \left\{\frac{1}{a_k}\sum_{j=1}^{k} I(S_j \in A) \leq x\right\}\right\} \to$$

$$\to H_\kappa(x)\mathbb{P}\left\{\frac{1}{a_k}\sum_{j=1}^{k} I(S_j \in A) \leq x\right\} =: p_k(x), \qquad x \geq 0,$$

minden rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén. Legyen $J_A(y) = 1$ vagy $J_A(y) = 0$, annak megfelelően, hogy $y \in A$ vagy $y \notin A$, tekintsük a $B_k(x) := \left\{\mathbf{y}_k := (y_1, \ldots, y_k) : \sum_{j=1}^k J_A(y_j) \leq a_k x\right\} \subset \mathbb{R}^k$ Borel-mérhető halmazt és vezessük be továbbá az $\mathbf{S}_k := (S_1, \ldots, S_k)$ jelölést, egyúttal a szokásos konvencióban is megegyezve, miszerint egy vektoriális egyenlőtlenség akkor és csak akkor érvényes, ha minden komponensre fennáll. Használva a teljes valószínűség tételét, az alapul vett sorozat tagjainak függetlenségét és az egész sorozat stacionaritását, bármely $x \geq 0$ és $k \in \mathbb{N}$ választásánál

$$p_{n,k}(x) =$$

$$= \int_{B_k(x)} \mathbb{P}\left\{\frac{1}{a_n}\sum_{j=k+1}^{n} I(S_k + X_{k+1} + \cdots + X_j \in A) \leq x \,\middle|\, \mathbf{S}_k = \mathbf{y}_k\right\} d\mathbb{P}\{\mathbf{S}_k \leq \mathbf{y}_k\} =$$

$$= \int_{B_k(x)} \mathbb{P}\left\{\frac{1}{a_n}\sum_{j=k+1}^{n} I(y_k + X_{k+1} + \cdots + X_j \in A) \leq x\right\} d\mathbb{P}\{\mathbf{S}_k \leq \mathbf{y}_k\} =$$

$$= \int_{B_k(x)} \mathbb{P}\left\{\frac{a_{n-k}}{a_n}\frac{1}{a_{n-k}}\sum_{j=1}^{n-k} I(S_j \in A - y_k) \leq x\right\} d\mathbb{P}\{S_1 \leq y_1, \ldots, S_k \leq y_k\} =$$

$$\to H_\kappa(x)\mathbb{P}\left\{(S_1, \ldots, S_k) \in B_k(x)\right\} = p_k(x).$$

Az utolsó lépésben itt a konvergens függvénysorozatok tagonkénti integrálhatóságára vonatkozó „kis" Lebesgue-tételt használtuk korlátos sorozat esetére és azt, hogy $a_{n-k}/a_n = [1 - kn^{-1}]^\kappa L\big(n[1 - kn^{-1}]\big)/L(n) \to 1$, a lassú változású függvények egyenletes konvergenciájára vonatkozó tétel szerint ([2], pp. 6–10). A legfontosabb persze az, hogy a (3.1) feltétel és a lemma következtében a (3.1) feltétel és ezért (3.2) az összes $y_k \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az $A - y_k$ halmazra. Természetesen $|A - y_k| = |A|$ a nem-rácsos esetben. Ahhoz, hogy a rácsos esetben formálisan is helyes legyen az okoskodás, az $A - y_k$ halmazokat helyettesíthetjük az $A(y_k) := \{lh : lh \in A - y_k, l \in \mathbb{Z}\}$ halmazokkal, amelyekre persze $|A(y_k)| = |A|$, $y_k \in \mathbb{R}$. A 2. tétel utolsó állítása szintén a lemmából következik.

Az 1. tétel nemtriviális irányának a bizonyítása a fentihez teljesen hasonló, amennyiben most $A := (0, \infty)$, $a_n \equiv n$ és $H_\kappa(x)$-et az $x \in [0,1]$ megszorítással $G_\rho(x)$-re cseréljük, ahol $\rho \in (0,1)$ a (2.1) feltétel paramétere. Ekkor az utolsó lépésben a konvergencia (2.6) miatt áll fenn. Ha $\mathbb{P}\{E\} > 0$ egy $E \in \mathcal{E}$ eseményre, akkor a most bizonyított állítás azt jelenti, hogy $\mathbb{P}\{n^{-1}\sum_{j=1}^n I(S_j > 0) \leq x \mid E\} \to G_\rho(x)$, $0 \leq x \leq 1$, és mivel a második állítás kihagyásával (2.3) minden $s > 0$ számra érvényes $r \in \mathbb{N}$ helyett, a feltételes momentumok is a kívánt módon konvergálnak. ∎

Legyenek most $Y_1, Y_2, \ldots$ független, de nem szükségképpen egyforma eloszlású véletlen változók úgy, hogy $\mathbb{E}(Y_j) = 0$ és $\mathbb{E}(Y_j^2) = 1$ minden $j \in \mathbb{N}$ esetén és tegyük fel, hogy $[Y_1 + \cdots + Y_n]/\sqrt{n}$ határeloszlása standard normális. Ekkor érvényes Erdős és Kac [18] arcus-sinus törvénye, sőt, Dzhamirzaev [15] némileg hosszadalmas és bonyodalmas bizonyítása szerint a $\{n^{-1}\sum_{j=1}^n I(Y_1 + \cdots + Y_j > 0)\}$ sorozat Rényi-keverő a $G_{1/2}(\cdot)$ határeloszlás-függvénnyel. (Bizonyításának egy pontján Dzhamirzaev hivatkozik Erdős és Kac [17] egy másik eredményére, amely független és *egyforma eloszlású* véletlen változók maximális részletösszegeinek határeloszlására vonatkozik. Ha ezt a hivatkozást Rényi [26] 9. tételére vonatkoztatjuk, amely éppen a szóbanforgó Erdős–Kac-tételt terjeszti ki nem egyforma eloszlású változókra, a bizonyítás jónak tűnik.) Mivel Erdős és Kac [18] fenti feltételei $k \in \mathbb{N}$ bármely rögzítésére fennállnak természetesen a $Y_{k+1}, Y_{k+2}, \ldots$ sorozatra is, és így arcus-sinus törvényük ugyanúgy érvényes a részletösszegek $\{S_j(k) := Y_{k+1} + \cdots + Y_j\}_{j=k+1}^\infty$ sorozatára is, és mivel az aszimptotikus normalitás feltétele (2.5) analógiájaként maga után vonja, hogy $n^{-1}\sum_{j=k+1}^n \mathbb{P}\{-y < S_j(k) \leq y\} \to 0$, $y > 0$, látjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=k+1}^{n} I(S_j(k) > y) \leq x\right\} \to G_{1/2}(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{4.1}$$

minden rögzített $y \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$ számokra. Ha ezt használjuk (2.6) helyett, akkor a fenti bizonyítás érvényben marad és így Dzhamirzaev tétele azonnal adódik.

5. Kiterjesztés Révész-függő véletlen változókra

Legyen $\mathbb{Q}$ tetszőleges olyan valószínűségi mérték az $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező $\mathcal{E}$ σ-algebráján, amelyre $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Ekkor Rényi [27] 1. és 2. tételeiből és a fenti tételekből következik, hogy a (2.1) feltétel mellett (2.2) akkor is igaz, amikor benne $\mathbb{P}$-t $\mathbb{Q}$-ra cseréljük (és így (2.3) is a $\mathbb{Q}$-ra vonatkozó $\mathbb{E}_\mathbb{Q}(\cdot)$ várható értékre), illetve a (3.1) feltétel mellett (3.2) $\mathbb{Q}$-ra is érvényes $\mathbb{P}$ helyett. Ez a tény lehetővé teszi, hogy az eredeti határeloszlás-tételeket gyengén függő véletlen változók sorozataira terjesszük ki, ha ezeknek a sorozatoknak az eloszlása abszolút folytonos a független változók eredeti sorozatainak eloszlásaira nézve.

Jelen szerző egy ilyen szituációt ismer az irodalomban: Akkor mondjuk, hogy (nem szükségképpen egyforma eloszlású) véletlen változók egy $V_1, V_2, \ldots$ sorozata

Révész-függő az $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ mezőn (vagy Révész értelmében gyengén függő), ha léteznek olyan $r_1, r_2, \ldots$ nem-negatív számok, hogy intervallumoknak egy tetszőleges $(a_1, b_1], (a_2, b_2], \ldots$ rendszerére, ahol $a_j \le b_j$ és $a_j, b_j \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $j \in \mathbb{N}$, fennáll, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left| \frac{\mathbb{P}\{ \cap_{j=1}^{n} \{a_j < V_j \le b_j\}\}}{\mathbb{P}\{ \cap_{j=1}^{n-1} \{a_j < V_j \le b_j\}\}\mathbb{P}\{a_n < V_n \le b_n\}} - 1 \right| \le r_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 < \infty.$$

(A definícióban a $0/0 := 1$ megállapodással élünk.) Ekkor, ha $\mathbf{V} := \{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ Révész-függő, Révész [31] 2. tételének bizonyítása mutatja, hogy a $\mathbf{V}$ sorozat $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}$ eloszlása abszolút folytonos független véletlen változók egy olyan $\mathbf{W} := \{W_j\}_{j=1}^{\infty}$ sorozatának $\mathcal{L}_{\mathbf{W}}$ eloszlására nézve, amelyre $\mathbb{P}\{W_j \le x\} = \mathbb{P}\{V_j \le x\}$, $x \in \mathbb{R}$, minden $j \in \mathbb{N}$ esetén. Ezért érvényes az előző szakasz két tételének alábbi folyománya:

1. Következmény. *Legyen $X_1^*, X_2^*, \ldots$ egyforma eloszlású, Révész-függő véletlen változók egy sorozata az $S_j^* := X_1^* + \cdots + X_j^*$, $j \in \mathbb{N}$, részletösszegekkel és legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, egyforma eloszlású véletlen változók ugyanazzal a marginális eloszlással: $\mathbb{P}\{X_1 \le x\} = \mathbb{P}\{X_1^* \le x\}$, $x \in \mathbb{R}$. Ha az $X_1, X_2, \ldots$ változók teljesítik a* (2.1) *feltételt, akkor* (2.2) *és* (2.3) *az $\{S_j^*\}_{j=1}^{\infty}$ sorozatra is fennáll. Ha pedig az $X_1, X_2, \ldots$ változók kielégítik a* (3.1) *feltételt, akkor (3.2) az $\{S_j^*\}_{j=1}^{\infty}$ sorozatra is érvényes.*

Természetesen a Révész-féle majdnem függetlenség a függőségnek egy igen gyenge formája. Tekintve, hogy a Rényi-keverés milyen könnyen adódik, ha a Spitzer- és az Erdős–Kac-tétel esetén (2.6) vagy (4.1), a Darling–Kac-tétel esetén pedig a lemma állítása már ismert, ebből a forrásból nehezen remélhetnénk többet. Ugyanakkor Spitzer tételénél a függetlenségtől való legcsekélyebb eltérés is érdekes; jelen szerző nem ismer más ilyet az általánosított arcus-sinus tétel esetében. Mint említettük, Darling és Kac tétele Markov-láncok egy elég bő osztályára is igaz. Ebben az esetben tehát az önmagában nem meglepő, hogy (3.2) kiterjeszthető függő változók összegeire. A Révész-függőség „gyenge" mivolta ellenére ez a kiterjesztés talán mégis érdekes annyiban, amennyiben az eredményül adódó összegek egymástól való függése nem Markov-jellegű.

Ha most $Y_1^*, Y_2^*, \ldots$ nem szükségképpen egyforma eloszlású, Révész-függő véletlen változók egy sorozata nulla várható értékkel és egységnyi szórással úgy, hogy a megfelelő független $Y_1, Y_2, \ldots$ sorozat, amelyre $\mathbb{P}\{Y_j \le x\} = \mathbb{P}\{Y_j^* \le x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, kielégíti a Lindeberg-feltételt, akkor Dzhamirzaev fent bizonyított tételéből következik, hogy $\mathbb{P}\{n^{-1} \sum_{j=1}^{n} I(Y_1^* + \cdots + Y_j^* > 0) \le x\} \to G_{1/2}(x)$, $0 \le x \le 1$, Erdős és Kac [18] arcus-sinus tételének általánosításaként. Ebben az esetben ugyanakkor feltehető, hogy jobb általánosítások következnek Prohorovnak a részletösszeg folyamat gyenge konvergenciájára vonatkozó ismert tétele (amikor is a határfolyamat a standard Brown-mozgás) különböző gyengén függő, de a Révész-félénél enyhébb keverési feltételeket megkívánó sorozatokra történt kiterjesztéseiből; ebben az irányban nem tártuk fel az irodalmat.

Révész [31] véletlen változók *összegeire* vonatkozó határeloszlás-tételek kontextusában fogalmazta meg tételét, amelyek a Rényi-keverés egyetlen példáját képezték abban az időben független összeadandókra. Azóta ez a keverési tulajdonság független változók számos más függvényére vonatkozó határeloszlás-tételek kisérőjelenségeként is megjelent, melyek száma itt most kettővel nőtt. Minden ilyen tétel kiterjed Révész-függő változókra. Példaként Gnyegyenko maximumokra vonatkozó tétele említhető, vagy Erdős és Kac [17] négy tétele részletösszegek és abszolút értékeik maximumaira, valamint részletösszegek abszolút értékeinek és négyzeteinek összegeire; ezeket a korábbi referenciákkal együtt a [9] dolgozatban tárgyaltuk. (Egy magyar nyelvű dolgozatban talán megjegyezhető, hogy a [9] dolgozat a szerző a Szegedi Egyetemen 1970-ben megvédett diplomamunkájának egy fejezetén alapul, tehát huszonhét év után azt a diplomamunkát folytatjuk itt.) Felmerül persze az is, hogy $\mathbf{V}$ gyenge függésének Révész-féle formája a legjobb-e az $\mathcal{L}_{\mathbf{V}} \ll \mathcal{L}_{\mathbf{W}}$ dominancia eléréséhez; természetesen a Rényi-keveréssel történő párosításra minden esetleges új forma ugyanúgy működne, mint a jelenlegi.

6. Pozitív összegek száma véletlen számú játékban

Az első négy szakasz jelöléseit megőrizve, tekintsük még véletlen változóknak két további sorozatát, melyeket $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ jelöl; ezek ugyanazok is lehetnek és ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn vannak megadva, ahol az alapul vett független, egyforma eloszlású változók $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozata, méghozzá úgy, hogy ν_n és μ_n minden n-re csak pozitív egész értékeket vehetnek fel és pozitív számoknak ugyanarra a $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ nem-csökkenő sorozatára, amelyre $d_n \to \infty$, fennáll, hogy

$$\frac{\nu_n}{d_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \nu \qquad \text{és} \qquad \frac{\mu_n}{d_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$$

valamilyen ν és μ véletlen változókra, amelyekre $\mathbb{P}\{\nu > 0\} = 1 = \mathbb{P}\{\mu > 0\}$.

A [9] cikk 1. tételének egy speciális esete azt mondja, hogy ha egy majdnem biztosan monoton nem-csökkenő véletlen sorozat tagjaiból és pozitív számok egy regulárisan változó sorozatának tagjaiból képezzük a megfelelő hányadosok sorozatát, akkor, amennyiben a hányadosok sorozata Rényi-keverő egy nem-degenerált határeloszlás-függvénnyel, a ν_n sorozattal indexezett véletlen részsorozat is az, ugyanazzal a határeloszlás-függvénnyel. Nemrégiben Kruglov és Zhang [23] megmutatták, hogy (egy rögzített $\{\nu_n\}$ sorozat esetén) az állítás fordítottja is igaz, legalábbis akkor, amikor a regulárisan változó normáló sorozat kitevője pozitív és maga sem csökkenő: a véletlenül indexezett sorozat Rényi-keveréséből következik az eredetié is, ugyanazzal a határeloszlás-függvénnyel.

Ha ezeket az eredményeket és az 1. tételt összetesszük, akkor a véletlenül indexezett sorozat Rényi-keveréséből adódó, [9] 2. tételében részletezett további folyománnyal együtt a következőre jutunk:

2. Következmény. *A* $\left\{\sum_{j=1}^{\nu_n} I(S_j > 0)/\nu_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozat akkor és csak akkor Rényi-keverő egy nem-degenerált határeloszlás-függvénnyel, ha Spitzer* (2.1) *feltétele teljesül, mely esetben*

$$\mathbb{P}\left\{\left\{\frac{1}{\mu_n}\sum_{j=1}^{\nu_n} I(S_j > 0) \le x\right\} \cap E\right\} \to \int_E G_\rho\left(\frac{\nu}{\mu}x\right) d\mathbb{P}, \quad x \ge 0,$$

minden $E \in \mathcal{E}$ *eseményre, ahol* $t \ge 1$ *esetén* $G_\rho(t) = 1$, *és*

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\nu_n^s}\left[\sum_{j=1}^{\nu_n} I(S_j > 0)\right]^s \middle| E\right) \to \frac{\Gamma(s+\rho)}{\Gamma(s+1)\Gamma(\rho)}, \quad s > 0, \tag{6.1}$$

minden pozitív valószínűségű $E \in \mathcal{E}$ *eseményre.*

Speciálisan, ha a (2.1) feltétel teljesül, akkor

$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{\mu_n}\sum_{j=1}^{\nu_n} I(S_j > 0) \le x\right\} \to \mathbb{E}\left(G_\rho\left(\frac{\mu}{\nu}x\right)\right), \quad x \ge 0.$$

A (2.1) feltétel mellett ez persze magában foglalja azt, hogy

$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{\nu_n}\sum_{j=1}^{\nu_n} I(S_j > 0) \le x\right\} \to G_\rho(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{6.2}$$

ami a 2. következmény lényege, és azokat a szórakoztató változatokat, miszerint

$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{d_n}\sum_{j=1}^{\nu_n} I(S_j > 0) \le x\right\} \to \mathbb{P}\{\nu \le x\} + \int_x^\infty G_\rho\left(\frac{x}{y}\right) d\mathbb{P}\{\nu \le y\}, \quad x \ge 0,$$

és

$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{\mu_n}\sum_{j=1}^{\lfloor d_n \rfloor} I(S_j > 0) \le x\right\} \to \mathbb{P}\left\{\mu > \frac{1}{x}\right\} + \int_0^{1/x} G_\rho(yx)\, d\mathbb{P}\{\mu \le y\}, \quad x \ge 0.$$

A (6.1) és (6.2) állítások persze azokra a $\{\nu_n\}$ sorozatokra a legérdekesebbek, amelyek nemhogy nem függetlenek az $X_1, X_2, \ldots$ sorozattól, hanem egyenesen ebből vannak összerakva. A (2.1) feltétel mellett tegyük fel még azt is, hogy $m_\gamma := \mathbb{E}(|X|^\gamma) \in (0, \infty)$ valamilyen $\gamma > 0$ számra. (Ha például $\gamma \ge 2$ és $E(X) = 0$, akkor (2.1) már magától teljesül a $\rho = 1/2$ paraméterrel. Fordítva, ha F egy $\alpha \in (0, 2]$ kitevőjű stabilis eloszlás vonzástartományában van, amelynek ferdeségi paramétere $\beta \in (-1, 1)$, a lokációs paramétere pedig zérus, ahol az $\alpha = 1$ esetben feltesszük, hogy $\beta = 0$, az $\alpha \in (1, 2]$ esetben pedig azt, hogy $\mathbb{E}(X) = 0$, akkor $\alpha \ne 1$ esetén

(2.1) teljesül a $\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha\pi} \arctan\left(\beta \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right)$ paraméterrel és $\gamma \in (0, \alpha)$ bármely választása megengedett; az itteni részletekre nézve lásd például a [10] dolgozatot.) Legyen $Z_k^\gamma := |X_1|^\gamma + \cdots + |X_k|^\gamma$, $k \in \mathbb{N}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ egészre vezessük be a következő index-sorozatokat:

$$\nu_n(1) := Z_n^\gamma, \quad \nu_n(2) := \min\{k \in \mathbb{N} : Z_k^\gamma > n\}, \quad \nu_n(3) := \max\{k \in \mathbb{N} : Z_k^\gamma \le n\}$$

és

$$\nu_n(4) := \min\{k \in \mathbb{N} : Z_k^\gamma > nk^\delta \quad \text{valamely } \delta \in (0,1) \text{ számra.}$$

Ekkor a nagy számok erős törvénye segítségével megmutatható, hogy $\nu_n(1)/n \to m_\gamma$, $\nu_n(2)/n \to m_\gamma^{-1}$, $\nu_n(3)/n \to m_\gamma^{-1}$ és $\nu_n(4)/n^{1/(1-\delta)} \to m_\gamma^{1/(\delta-1)}$, minden esetben majdnem biztosan; lásd például az [5] könyv 5.4 szakaszát. Ezért (6.1) és (6.2) teljesül a $\nu_n \equiv \nu_n(l)$ sorozatnak az $l = 1, 2, 3, 4$ esetekre vonatkozó mind a négy választásával.

7. Látogatások száma véletlen számú lépésben

Használva mostmár az előző szakaszban a $\{\nu_n\}_{n=1}^\infty$ és $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ sorozatokra tett feltevéseket is, utolsó következményünkben a 2. tétel és [9] két tételének csak a direkt irányú folyományát mondjuk ki; világos, hogy Kruglov és Zhang [23] fent leírt megfordításából mikor következik az ellenirányú állítás. A lassú változású függvények már eddig is használt egyenletes konvergenciatételét ([2], pp. 6–10) lépten-nyomon használni kell az egyedi állítások belátásához, de ez rutin feladatnak ítélhető.

3. Következmény. *Ha Darling és Kac (3.1) feltétele teljesül valamely $A \in \mathcal{B}^*$ halmazra, akkor $\left\{ \sum_{j=1}^{\nu_n} I(S_j \in B)/\left[\nu_n^\kappa L(\nu_n)\right] \right\}_{n=1}^\infty$ Rényi-keverő minden $B \in \mathcal{B}^*$ halmaz esetén és*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left\{ \frac{\sum_{j=1}^{\nu_n} I(S_j \in B)}{\Gamma(\kappa+1)\,|B|\,\mu_n^\kappa L(\mu_n)} \le x \right\} \cap E\right\} = \int_E H_\kappa\left(\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^\kappa x\right) d\mathbb{P}, \quad x \ge 0,$$

minden $E \in \mathcal{E}$ eseményre. Speciálisan,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{\sum_{j=1}^{\nu_n} I(S_j \in B)}{\Gamma(\kappa+1)\,|B|\,\mu_n^\kappa L(\mu_n)} \le x \right\} = \mathbb{E}\left(H_\kappa\left(\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^\kappa x\right)\right), \quad x \ge 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{\sum_{j=1}^{\nu_n} I(S_j \in B)}{\Gamma(\kappa+1)\,|B|\,\nu_n^\kappa L(\nu_n)} \le x \right\} = H_\kappa(x), \quad x \ge 0, \tag{7.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{\sum_{j=1}^{\nu_n} I(S_j \in B)}{\Gamma(\kappa+1)\,|B|\,d_n^\kappa L(d_n)} \le x \right\} = \int_0^\infty H_\kappa\left(\frac{x}{y^\kappa}\right) d\mathbb{P}\{\nu \le y\}, \quad x \ge 0, \tag{7.2}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{\sum_{j=1}^{\lfloor d_n \rfloor} I(S_j \in B)}{\Gamma(\kappa+1)\,|B|\,\mu_n^{\kappa} L(\mu_n)} \le x \right\} = \int_0^\infty H_\kappa(xy^\kappa)\, d\mathbb{P}\{\mu \le y\}, \qquad x \ge 0.$$

Néhány a (7.1) és (7.2) határeloszlásokra adott konkrét példával zárjuk a dolgozatot, amelyekhez a $\{\nu_n\}$ sorozatokat már az előző szakaszban megkonstruáltuk. Tegyük fel tehát, hogy a (3.1) feltétel mellett $m_\gamma := \mathbb{E}(|X|^\gamma) \in (0,\infty)$ valamely $\gamma > 0$ számra. (Ha $\gamma \ge 2$ és $E(X) = 0$, akkor (3.1) automatikusan igaz a $\kappa = 1/2$ paraméterrel. Fordítva, ha $F \in \mathcal{D}_0(\alpha)$ valamely $\alpha \in (1,2]$ kitevőre, vagy $F \in \mathcal{D}_0^*(1)$ amikor $\alpha = 1$, úgyhogy (3.1) teljesül a $\kappa = (\alpha-1)/\alpha$ paraméterrel, akkor m_γ minden $\gamma \in (0,\alpha)$ érték esetén véges. Ha a harmadik szakaszban tárgyalt sejtés igaz, akkor m_γ bármely $\gamma \in \big(0, 1/(1-\kappa)\big)$ esetén automatikusan véges.) Tekintsük tehát ismét az előző szakaszban értelmezett $\nu_n(1), \nu_n(2), \nu_n(3), \nu_n(4)$ véletlen sorozatokat. Ekkor (7.1) fennáll a $\nu_n \equiv \nu_n(l)$ sorozat mind a négy választására, $l = 1,2,3,4$, és

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{\sum_{j=1}^{\nu_n(l)} I(S_j \in B)}{\Gamma(\kappa+1)\,|B|\,n^\kappa L(n)} \le x \right\} = H_\kappa\left(\frac{x}{c_l^\kappa}\right), \qquad x \ge 0,$$

ha $l = 1,2,3$, ahol $c_1 = m_\gamma$ és $c_2 = m_\gamma^{-1} = c_3$, valamint

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{\sum_{j=1}^{\nu_n(4)} I(S_j \in B)}{\Gamma(\kappa+1)\,|B|\,n^{\kappa/(1-\delta)} L(n^{1/(1-\delta)})} \le x \right\} = H_\kappa\big(m_\gamma^{\kappa/(1-\delta)} x\big), \qquad x \ge 0.$$

Hivatkozások

[1] D. J. Aldous and G. K. Eagleson, On mixing and stability of limit theorems, *Ann. Probab.*, **6** (1978), 117–126.

[2] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, *Regular Variation*, Cambridge University Press (Cambridge, 1987).

[3] N. H. Bingham and J. Hawkes, Some limit theorems for occupation times, In: *Probability, Statistics and Analysis* (J. F. C. Kingman and G. E. H. Reuter, eds.), pp. 46–62. London Math. Soc. Lecture Notes **79**, Cambridge University Press (Cambridge, 1983).

[4] J. Bretagnolle et D. Dacunha-Castelle, Théorèmes limites à distance finie pour les marches aléatoires, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B*, **4** (1968), 25–73.

[5] Y. S. Chow and H. Teicher, *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales*, Second Edition, Springer (New York, 1988).

[6] M. Csörgő and S. Csörgő, On weak convergence of randomly selected partial sums, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **34** (1973), 52–60.

[7] Csörgő M., Csörgő S., Fischler R. és Révész P., Véletlen-indexes határeloszlás-tételek erős invariancia-tételek segítségével, *Matematikai Lapok*, **26** (1975), 39–66.

[8] M. Csörgő and R. Fischler, Some examples of and results of mixing and random-sum central limit theorems, *Periodica Math. Hungar.*, **3** (1973), 41–57.

[9] S. Csörgő, On limit distributions of sequences of random variables with random indices, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **25** (1974), 227–232.

[10] S. Csörgő, Notes on extreme and self-normalised sums from the domain of attraction of a stable law, *J. London Math. Soc.*, **(2) 39** (1989), 369–384.

[11] S. Csörgő, E. Haeusler and D. M. Mason, A probabilistic approach to the asymptotic distribution of sums of independent, identically distributed random variables, *Adv. Appl. Math.*, **9** (1988), 259–333.

[12] D. A. Darling and M. Kac, On occupation times for Markoff processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84** (1957), 444–458.

[13] R. A. Doney, A note on a condition satisfied by certain random walks, *J. Appl. Probab.*, **14** (1977), 843–849.

[14] R. A. Doney, Spitzer's condition for asymptotically symmetric random walk, *J. Appl. Probab.*, **17** (1980), 856–859.

[15] A. A. Dzhamirzaev, The mixing property in the sense of Rényi for the number of positive sums [oroszul], *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **41** (1979), 47–53.

[16] D. J. Emery, On a condition satisfied by certain random walks, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **31** (1975), 125–139.

[17] P. Erdős and M. Kac, On certain limit theorems of the theory of probability, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 292–302.

[18] P. Erdős and M. Kac, On the number of positive sums of independent random variables, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 1011–1020.

[19] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. I [Third Edition, Chapter III] and Vol. II [Second Edition, Chapter XII], Wiley (New York, 1968 and 1971).

[20] R. K. Getoor and M. J. Sharpe, On the arc-sine laws for Lévy processes, *J. Appl. Probab.*, **31** (1994), 76–89.

[21] H. Kesten, A Tauberian theorem for random walk, *Israel J. Math.*, **6** (1968), 279–294.

[22] H. Kesten, A sharper form of the Doeblin–Lévy–Kolmogorov–Rogozin inequality for concentration functions, *Math. Scand.*, **25** (1969), 133–144.

[23] V. M. Kruglov, Bo Zhang, Limit theorems for maximal random sums [oroszul], *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, **41** (1996), 520–532.

[24] P. Lévy, Sur certains processus stochastiques homogènes, *Compositio Math.*, **7** (1939), 283–339. [Corollaire 2, pp. 303–304.]

[25] H. Pollard, The completely monotonic character of the Mittag–Leffler function $E_a(-x)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 1115–1116.

[26] A. Rényi, On the theory of order statistics, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **4** (1953), 191–231. [Magyar változat: A rendezett minták elméletéről, *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztály Közleményei* **3** (1953), 467–503.]

[27] A. Rényi, On mixing sequences of sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **9** (1958), 215–228.

[28] Rényi A., *Valószínűségszámítás*, 2. kiadás. Tankönyvkiadó (Budapest, 1968).

[29] A. Rényi, *Foundations of Probability,* Holden-Day (San Francisco, 1970).

[30] A. Rényi and P. Révész, On mixing sequences of random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **9** (1958), 389–393.

[31] P. Révész, A limit distribution theorem for sums of dependent random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **10** (1959), 125–131.

[32] Z. Rychlik, Some remarks on stable sequences of random variables, In: *Sequential Methods in Statistics* (*Banach Center Publications* **16**), pp. 455–463, PWN, Warsaw, 1985.

[33] E. Sparre Andersen, On the fluctuations of sums of random variables II, *Math. Scand.,* **2** (1954), 195–223.

[34] F. Spitzer, A combinatorial lemma and its applications to probability theory, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **82** (1956), 323–339.

[35] F. Spitzer, *Principles of Random Walk,* Van Nostrand, Princeton (New Jersey, 1964).

[36] C. Stone, Ratio limit theorems for random walks on groups, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **125** (1966), 86–100.

[37] L. Takács, The arc sine law of Paul Lévy, In: *Contributions to Probability,* A Collection of Papers Dedicated to Eugene Lukacs (J. Gani and V. K. Rohatgi, eds.), pp. 49–63. Academic Press (New York, 1981).

Csörgő Sándor

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet
H–6720 Szeged
Aradi vértanúk tere 1.

Sándor Csörgő: Two new examples of Rényi-mixing

After exposing the original theorems in detail, Rényi-mixing is shown in two classical limit theorems. One is the generalized arc-sine law for the proportion of positive sums of independent and identically distributed random variables under Spitzer's necessary and sufficient condition, the other is the Darling–Kac law for the occupation times of a bounded interval by these sums under the respective necessary and sufficient condition. Some consequences for the number of positive sums in a random number of games and for the occupation times of a random walk in a random number of steps are derived, along with extensions of the original laws for Révész-dependent sequences of random variables.

JELENTÉS AZ 1996. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1996. november 22. és december 2. között rendezte meg az 1996. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen részt vehetett minden egyetemi és főiskolai hallgató, középiskolai diák, továbbá azok, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 1996-ban fejezték be. A Versenybizottság 10 feladatot tűzött ki a versenyre.

Az első feladatot Juhász István, a másodikat Károlyi Gyula, Pach János és Tóth Géza, a harmadikat Károlyi Gyula, a negyediket Pyber László, az ötödiket Benkő Dávid, a hatodikat Totik Vilmos, a hetediket Halász Gábor és Szegő Gábor, a nyolcadikat Szűcs András, a kilencediket Fejes Tóth Gábor és W. Kuperberg, a tizediket Michaletzky György javasolta kitűzésre.

A kitűzött feladatokra 13 versenyző összesen 57 megoldást küldött be. Minden feladatra érkezett helyes megoldás. Legnehezebbnek az első és a hatodik feladat bizonyult, ezekre csak egy-egy teljes megoldás született. Kevés megoldás érkezett még a hetedik és a nyolcadik feladatra.

A Versenybizottság az 1997. január 6-i ülésén a következő határozatot hozta:

I. díjat és 12 ezer forint jutalmat kap *Csörnyei Marianna,* az ELTE harmadéves hallgatója.

II. díjat és 8 ezer forint jutalmat kap *Szegedy Balázs,* az ELTE negyedéves hallgatója.

III. díjat és fejenként 5 ezer forint jutalmat kapnak *Elekes Márton, Matolcsi Máté,* valamint *Szeidl Ádám,* az ELTE negyed-, negyed- és harmadéves hallgatói.

Indoklás. *Csörnyei Marianna* kifogástalanul megoldotta a 2., 3., 4., 5., 6., 9., 10. feladatokat és részeredményt ért el az első feladat megoldásában. A 6. feladatra egyedül ő adott be teljes megoldást, a 4. feladatot pedig általánosította.

Szegedy Balázs teljes megoldást adott a 2., 3., 4., 9., 10. feladatokra és a 6. feladat a) részére, részeredményt ért el a 8. feladat megoldásában. A 4. feladatban a kitűzöttnél élesebb becslést bizonyított, és kiemelkedően egyszerű a 3. feladatra adott megoldása.

Elekes Márton teljesen megoldotta az 5., 8. feladatokat és a 6. feladat a) részét, lényegében megoldotta a 3. és a 9. feladatot, részeredményeket ért el az 1. és a 2. feladat megoldásában.

Matolcsi Máté teljes megoldást adott a 3., 5., 8. feladatokra és a 6. feladat a) részére, és lényegében megoldotta a 9. feladatot.

Szeidl Ádám teljesen megoldotta a 2. feladatot, lényegében megoldotta a 4., 9. feladatot és a 6. feladat a) részét. Egy javítható hibától eltekintve jó a 7. feladatra adott megoldása, és részeredményeket ért el az 1. feladat megoldásában.

A Versenybizottság: Császár Ákos, Fejes Tóth Gábor, Fried Ervin, Freud Róbert, Halász Gábor, Kiss Emil, Komjáth Péter, Laczkovich Miklós – elnök, Michaletzky György, Ruzsa Imre, T. Sós Vera, Szabó Endre – titkár.

Az 1996. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. Legyen X egy κ súlyú kompakt T_2 tér. Bizonyítandó, hogy minden $\omega \leq \lambda < \kappa$-ra van X-nek λ súlyú T_2 folytonos képe. (Egy X tér súlya az a legkisebb végtelen számosság, melyre van X-nek legfeljebb ilyen számosságú bázisa.)

2. Egy teljes gráf csúcsai úgy helyezkednek el a síkban, hogy közülük semelyik három nincs egy egyenesen. A gráf éleit, melyek a csúcsokat összekötő egyenes szakaszok, megszíneztük két színnel. Bizonyítandó, hogy létezik azonos színű élekből álló, önmagát nem metsző feszítőfa.

3. Legyenek $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n} \leq 4n-2$ egész számok, összegük páros. Bizonyítandó, hogy minden elég nagy n-re létezik $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n} = \pm 1$ úgy, hogy

$$\sum \varepsilon_i = \sum \varepsilon_i a_i = 0.$$

4. Bizonyítandó, hogy egy G véges csoportban az n indexű részcsoportok száma legfeljebb $|G|^{2\log_2 n}$.

5. Létezik-e a szigorúan pozitív tagú konvergens sorok K halmaza és a szigorúan pozitív tagú divergens sorok D halmaza között olyan bijekció, hogy tetszőleges K-beli $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok és a nekik megfelelő $\sum a'_n$ és $\sum b'_n$ D-beli sorok esetén $a_n/b_n \to 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a'_n/b'_n \to \infty$?

6. Legyen $\{a_n\}$ korlátos valós sorozat.
a) Igazoljuk, hogy ha X a számegyenes pozitív mértékű részhalmaza, akkor majdnem minden $x \in X$-re van olyan $\{y_n\}$ részsorozata X-nek, amelyre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(n(y_n - x) - a_n\big) = 1.$$

b) Mutassunk olyan nem korlátos $\{a_n\}$ sorozatot, amelyre szintén igaz az előbbi állítás.

7. Konstruáljunk olyan $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\big(|z| < 1\big)$, az egységkörben reguláris függvényt, amely egy pont kivételével az egységkörvonal minden pontján át analitikusan folytatható, és amelyre az $\{a_n\}$ sorozatnak két torlódási pontja van, a ∞ és egy véges érték.

8. Lássuk be, hogy egy zárt (azaz kompakt, perem nélküli), egyszeresen összefüggő sokaság nem tartalmazhat 1 kodimenziós, zárt, páratlan Euler karakterisztikájú, sima részsokaságot.

9. Tekintsük egységgömbök egy $\mathcal{G}$ rendszerét a d dimenziós $\mathbf{R}^d$ euklideszi térben. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{G}$ *k-adrendben redukált,* ha nem lehetséges $\mathcal{G}$-ből k gömböt elhagyni és azokat $k-1$ egységgömbbel helyettesíteni úgy, hogy az ilyen módon kapott új rendszer minden pontot lefed, amit a $\mathcal{G}$-hez tartozó gömbök lefedtek. Definiáljuk $\mathcal{G}$ alsó és felső sűrűségét a $\liminf_{r\to\infty} N_{\mathcal{G}}(r)/r^d$ és $\limsup_{r\to\infty} N_{\mathcal{G}}(r)/r^d$ mennyiségekkel, ahol $N_{\mathcal{G}}(r)$ jelöli azon $\mathcal{G}$-beli gömbök számát, melyeket az origó köré írt r sugarú gömb lefed.

Mutassuk meg, hogy létezik $\mathbf{R}^d$-beli egységgömböknek tetszőlegesen nagy alsó sűrűségű d-edrendben redukált rendszere, viszont van olyan c_d konstans, hogy egységgömböknek tetszőleges $d+1$-rendben redukált rendszerének felső sűrűsége legfeljebb c_d.

10. Legyenek $Y_1, \dots, Y_n$ felcserélhető valószínűségi változók, azaz tetszőleges π permutáció esetén $\big(Y_{\pi(1)}, \dots, Y_{\pi(n)}\big)$ eloszlása megegyezik $\big(Y_1, \dots, Y_n\big)$ eloszlásával. Legyen $S_0 = 0$ és

$$S_j = \sum_{i=1}^{j} Y_i, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Jelölje $S_{(0)}, \dots, S_{(n)}$ az $S_0, \dots, S_n$ valószínűségi változókból képzett rendezett mintát. Mutassuk meg, hogy $S_{(j)}$ eloszlása megegyezik $\max_{0\le i\le j} S_i + \min_{0\le i\le n-j} (S_{j+i} - S_j)$ eloszlásával.

A feladatok megoldása jelenleg nem áll a szerkesztőség rendelkezésére, ezért csak egy későbbi számunkban tudjuk ezeket közölni.

KÖNYVISMERTETÉS

Alexander L. Skubachevskii: Elliptic Functional Differential Equations and Applications
Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 1997.

A könyv lineáris elliptikus funkcionál differenciálegyenletekre vonatkozó peremérték feladatokkal foglalkozik, első sorban a szerzőnek e témában úttörő jelleg munkássága alapján, felhasználva moszkvai előadásain szerzett tapasztalatait. A kötet olyan felsőbb éves egyetemi hallgatók, doktoranduszok, matematikusok részére készült, akiknek érdeklődési területe a funkcionál differenciálegyenletek, ill. a parciális differenciálegyenletek elmélete. Hasznos lehet még a könyv olyan kutatók számára, akik a kontroll elmélet, a diffúziós folyamatok elmélete vagy a rugalmasságtan területén dolgoznak.

Az elliptikus funkcionál differenciálegyenletek elmélete a funkcionál differenciál-egyenletek és a parciális differenciálegyenletek elméletéből fejlődött ki. A könyvben az elliptikus funkcionál differenciálegyenletek következő két típusáról van szó: elliptikus parciális differenciálegyenletek nemlokális peremfeltétellel, ill. elliptikus differenciál-differencia egyenletek. Elliptikus differenciálegyenletek nemlokális peremfeltétellel a plazma fizikában lépnek fel. Ezt a problémát vizsgálta A. V. Bitsadze és A. A. Samarskii. Az elliptikus differenciál-differencia egyenletek szisztematikus vizsgálata a szerző nevéhez fződik. Szükséges és elégséges feltételeket adott a megoldhatóságra és az általánosított megoldás simaságára. A könyvben a szerző azt is megmutatja: milyen szoros kapcsolat van a nemlokális peremfeltételekkel tekintett elliptikus differenciálegyenletek és az elliptikus differenciál-differencia egyenletek között. Ennek felhasználása újabb eredmények elérését tette lehetővé a nemlokális peremfeltételekkel vett elliptikus differenciálegyenletek elméletében. Az elliptikus differenciál-differencia egyenletek legérdekesebb tulajdonságai az általánosított megoldás simaságával kapcsolatosak: sima jobb oldalú egyenletek megoldásai – az elliptikus parciális differenciálegyenletek esetétől eltérően – az eredeti tartománynak csak egy részében simák.

A könyv öt fejezetből és három függelékből áll. Az első fejezetben a szerző egyváltozós elliptikus funkcionál differenciálegyenletekkel foglalkozik. A második és harmadik fejezetben erősen elliptikus operátorokkal vett differenciál-differencia egyenletekről, valamint azok mechanikai alkalmazásairól van szó. A negyedik fejezetben tekintett differenciál-differencia egyenletek bizonyos degeneráltsággal rendelkező szimmetrikus, fékig korlátos operátorokhoz tartoznak. Az ötödik fejezetben az elliptikus differenciál-differencia egyenletre vonatkozó feladatot a szerző nemlokális peremfeltétellel vett elliptikus differenciálegyenletre vezeti vissza. Az alapvető eredményeket tartalmazó első és második fejezet után a többi fejezetek lényegében egymástól függetlenül olvashatók.

Az A)–C) függelékekben a szerző a funkcionál analízisnek, a Szoboljev-terek elméletének és az elliptikus parciális differenciálegyenletek elméletének a könyv szempontjából fontos eredményeit foglalja össze. A kötet végén jelölés jegyzék, tárgymutató és irodalom jegyzék található. Az egyes fejezetek végén a megfelelő irodalomhoz kapcsolódó megjegyzések vannak.

Simon László

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

ISSN 0025-519X

Nyomdai munkák: Modok és Társa Kft., Kiskunhalas – Tel.: 77/421-344/153